

Міністерство освіти і науки України

Модельна навчальна програма
курсу за обраним профілем
«Теорія графів та її застосування.»
Профільна середня освіта. Поглиблений рівень»
для закладів загальної середньої освіти
(автор Крижановський О.Ф.)

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

*Програма створена в рамках проєкту «Зміст» благодійного фонду savED
за підтримки фінської міжнародної неурядової організації Finn Church Aid*

Гриф надано наказом Міністерства освіти і науки України від 18.03.2026 № 484

Номер в каталозі: ПрО-0057-26

Вступна частина

Модельна навчальна програма курсу за обраним профілем «Теорія графів та її застосування» (далі – Програма) створена з метою реалізації компетентнісного потенціалу, мети й завдань математичної освітньої галузі та призначена для вивчення курсу в закладах загальної середньої освіти, які забезпечують здобуття профільної середньої освіти за академічним спрямуванням у STEM-кластері (профілі з поглибленим вивченням математики та фізики та профілі з поглибленим вивченням математики, інформатики, технологій).

Курс за обраним профілем «Теорія графів та її застосування» (далі – Курс) реалізується за умови його вибору учнівством та закладом освіти і може викладатися в межах передбаченої кількості навчальних годин для вивчення обов'язкових освітніх компонентів за обраним профілем навчання.

Програма створена в рамках проекту «Зміст» благодійного фонду savED за підтримки фінської міжнародної неурядової організації Finn Church Aid.

Програма *враховує наступність* та логічно продовжує реалізацію завдань математичної освіти здобувачів / здобувачок освіти, розпочату в початковій школі та 5–9 класах середньої школи, розширюючи та доповнюючи ці завдання відповідно до вікових і пізнавальних можливостей здобувачів / здобувачок освіти. Програма реалізовує частину обов'язкових результатів навчання в межах математичної освітньої галузі, доповнюючи очікувані результати навчання модельних навчальних програм обов'язкових освітніх компонентів («Алгебра. 10–12 класи. Поглиблений рівень», «Геометрія. 10–12 класи. Поглиблений рівень»).

Основою для формулювання очікуваних результатів навчання в Програмі є очікувані результати навчання (орієнтири для оцінювання) поглибленого рівня математичної освітньої галузі, що визначають профіль.

Метою вивчення курсу є формування математичної компетентності у взаємодії з іншими ключовими компетентностями для успішної освітньої та подальшої професійної діяльності впродовж життя, що передбачає засвоєння системи знань, удосконалення вміння розв'язувати математичні та практичні задачі. Формування математичної компетентності відбувається в поєднанні з розвитком інформаційно-комунікаційної компетентності (через роботу з програмним забезпеченням і середовищами програмування), інноваційності (під час дослідження та створення проєктів), уміння навчатися впродовж життя (завдяки підготовці та презентації власних рішень), а також компетентностей у галузі природничих наук, техніки й технологій (через практичне застосування математичних методів у різних сферах). Курс також сприяє вільному володінню державною мовою через письмове оформлення результатів досліджень, пояснення алгоритмів та участь у дискусіях. Таким чином, Курс забезпечує інтегроване формування ключових компетентностей, визначених Державним стандартом профільної середньої освіти.

Доцільність вивчення Курсу обумовлена тим фактом, що теорія графів є класичним розділом математики, який, на жаль, зовсім не представлений у шкільному курсі. Але ще з XVIII століття з праць Леонарда Ейлера стало зрозумілим, що багато теоретичних та практичних задач розв'язується саме за допомогою графічного представлення інформації. Неможливо собі уявити сучасну дискретну математику, біологію, програмування, роботу з базами даних без графів. Навіть знане школярами з історії генеалогічне дерево є графом із певними властивостями. Із розвитком сучасних комп'ютерних технологій класичні результати теорії графів набули нового застосування. Наприклад, вони широко використовуються в алгоритмах з пошуку оптимального шляху чи швидкому виконанні операцій завдяки структурі даних «дерево відрізків».

Основні завдання Курсу:

- сформувати в учнівства критичне та системне мислення, орієнтацію в прикладних можливостях застосування теорії графів, вміння працювати з різними джерелами інформації, розуміння ролі теорії графів у практичній діяльності;
- запропонувати цілісну картину теоретичних та практичних аспектів основних понять теорії графів;
- навчити застосовувати методи теорії графів у природничих, соціально-економічних навчальних предметах, а також в інформаційно-комунікаційних технологіях;
- розвивати творчість з урахуванням академічної доброчесності;
- подбати про розвиток особистості учнів / учениць та ідентичності в локальному й глобальному вимірах, осмислення їхніх цінностей;
- сприяти саморефлексивності, формувати навички врахування власних можливостей і потреб, розвивати потребу співпраці й самостійності, навчання впродовж життя;
- мотивувати учнів / учениць до дослідницької діяльності у сферах їхніх уподобань із залученням методів теорії графів.

Зміст Курсу відповідає *ціннісним орієнтирам*, окресленим у Державному стандарті профільної середньої освіти. Під час вивчення тем Курсу акцентується увага на академічній доброчесності, розвитку відповідального ставлення до навчання, здатності до співпраці, повазі до думки інших. Курс сприяє формуванню особистості, здатної до саморозвитку, критичного мислення, самостійного вибору освітньої та професійної траєкторії. Темі Курсу також пов'язані з аналізом сучасних технологічних і соціальних процесів, що підсилює міжпредметну інтеграцію та практичне застосування математичних знань.

Основними принципами, на яких ґрунтується Програма, є:

- компетентнісний підхід: основою для програми є досягнення компетентностей, передбачених Державним стандартом у математичній освітній галузі;

- цілісність: послідовне викладення тем з урахуванням їхніх взаємозв'язків з іншими предметами математичної освітньої галузі для досягнення всіх очікуваних результатів навчання учнів / учениць, базових знань і компетентнісного потенціалу галузі;

- практична зорієнтованість: у програмі передбачена значна кількість практичної діяльності учнів / учениць та їх заохочення до проєктної діяльності, розв'язання задач практичного змісту;

- врахування вікових й індивідуальних особливостей розвитку й потреб школярів / школярок: відбувається через послідовне поглиблене вивчення тем та набуття відповідних компетентностей.

Ключовими пріоритетами вивчення курсу є:

- формування компетентностей учнів / учениць у математичній галузі, передбачених Державним стандартом;

- відведення великої частини вивчення предмета практичним, зокрема груповим, видам діяльності;

- формування й усвідомлення взаємозалежностей між математичними моделями та життєвими практичними завданнями, зокрема професійними;

- формування критичного мислення, математичної грамотності та перетворення дійсності математичною мовою;

- створення математичного інструментарію учнів / учениць для його подальшого розвитку у сфері інформаційних технологій;

- проєктна робота та діяльнісний підхід;

- академічна доброчесність вчительства та учнівства.

Структура Курсу передбачає 34 години і складається з семи тем.

Особливості організації освітнього процесу для вивчення Курсу автор вбачає у тому, що вчительство вільне у виборі прикладів, задач, джерел інформації, застосуванні цифрових ресурсів, видів діяльності, методичних особливостей вивчення навчального матеріалу, оскільки головним є досягнення компетентностей учнівства. Автор наводить можливі види діяльності при вивченні вказаних тем, але залишає вибір для вчителя / учительки щодо їх застосування на уроках. Можна також змінювати орієнтовну кількість годин для вивчення певної теми з урахуванням особливостей та потреб учнів / учениць. Найважливіше у вивченні цього Курсу – формування математичних компетентностей учнів / учениць та створення фундаменту для їхнього подальшого розвитку.

Способи реалізації Курсу охоплюють три можливі моделі розподілу навчального часу:

- 1) одна година на тиждень протягом навчального року (рекомендовано для 10 класу, але можлива реалізація і в 11 класі);

- 2) дві години на тиждень протягом навчального семестру (рекомендовано для 10 класу, але можлива реалізація в 11 класі або в першому семестрі 12 класу);

3) інтенсивне вивчення Курсу протягом терміну, що обирає навчальний заклад, наприклад, три (чотири) години на тиждень (рекомендовано для 10 класу, але можлива реалізація також в 11 або 12 класах).

Реалізація Програми передбачає формування учнівських компетентностей, сформованих у математичній галузі.

ОСНОВНА ЧАСТИНА

Кількість годин: 34.

Очікувані результати навчання	Пропонований зміст курсу	Види навчальної діяльності
Тема 1. Неорієнтовані графи та їхні найпростіші властивості.		
<i>Учень / учениця:</i> - розпізнає задачі, які можна змодельовати у вигляді неорієнтованого графа [12 МАО 1.1.1-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «вирізняє специфічні проблемні ситуації, які можуть бути розв'язані математичними методами»); - при створенні математичної моделі у вигляді графів для компетентнісних задач знаходить суттєву частину інформації, оцінює її обґрунтованість [12 МАО 1.2.1-3 П] (в основі орієнтир для оцінювання «оцінює повноту і достовірність інформації»); - самостійно визначає тип графа для розв'язання, характеристики його ребер, вершин, кількість компонент зв'язності і т.ін. [12 МАО 1.2.3-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «визначає межі даних, формулює припущення щодо даних у специфічних проблемних ситуаціях»); - пропонує різні способи розв'язання задач про графи, оцінює складність реалізації різних видів перебору та порівнює їх із евристичними способами [12 МАО 1.3.2-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «пропонує альтернативні	1.1. Неорієнтовані графи: - вершини та ребра графа, петлі; - степінь вершини графа, кількість ребер у графі; - парні та непарні вершини; - лема «про рукоятискання»; - матриця суміжності неорієнтованого графа. 1.2. Шляхи та цикли в графі: - шлях, простий шлях; - цикл, простий цикл; - гамільтонів шлях, гамільтонів цикл; - повний граф, кількість ребер у повному графі. 1.3. Розв'язування практичних задач на найпростіші властивості графів. 1.4. Зв'язність графа: - зв'язні та незв'язні графи; - компоненти зв'язності, мости, шарніри; - достатня умова зв'язності: степінь кожної вершини більший за $\frac{n-1}{2}$; - дослідження компонента зв'язності як окремих графів. 1.5. Ізоморфізм графів: - означення ізоморфних графів;	Створення та застосування опорних конспектів за змістом теми. Дискусія. Обговорення. Усне опитування. Робота в парах з елементами взаємонавчання. Робота в малих групах. Індивідуальна робота із практичними завданнями. Робота з компетентнісно орієнтованими завданнями. Демонстрація прикладів розглянутих математичних фактів у житті. Ігрова діяльність. Проектна діяльність.

шляхи досягнення результатів розв'язання специфічної проблемної ситуації, оцінює можливі ризики»); - описує модель задачі у вигляді графа, описує його вершини, ребра, додаткові обмеження на кшталт зв'язності, повноти тощо [12 МАО 3.2.2-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «обирає математичну модель розв'язання специфічної проблемної ситуації з урахуванням різних умов»); - робить висновки про коректність застосування графів та їх властивостей при розв'язанні задачі [12 МАО 4.1.2-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «робить висновки щодо застосування математичних понять і фактів»); - добирає означення, факти та алгоритми щодо неорієнтованих графів для розв'язання задач [12 МАО 4.2.1-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «добирає доцільні математичні поняття, факти і послідовність дій для розв'язання проблемних ситуацій»); - розв'язує задачу, використовуючи означення, факти, алгоритми щодо графів, досліджує отримані у моделі-графі результати з точки зору початкової постановки задачі [12 МАО 4.2.1-2 П] (в основі орієнтир для оцінювання «реалізовує визначену послідовність дій для розв'язання специфічних проблемних ситуацій, перевіряє та досліджує отримані результати»); - використовує ІКТ для програмування	- доведення ізоморфізму в нескладних випадках; - спростування ізоморфізму із використанням відмінності в кількості вершин, степенях вершин, кількості компонентів зв'язності і т. п.; - побудова ізоморфних графів. 1.6. Розв'язування практичних задач про зв'язність та ізоморфізм графів.	
---	---	--

та/або візуалізації отриманих за допомогою графів результатів [12 МАО 4.2.3-1 П] (в основі орієнтир «використовує приладдя та інформаційно-комунікаційні технології для представлення результату у специфічних проблемних ситуаціях»); - використовує поняття та алгоритми, пов'язані з неорієнтованими графами, при реалізації та захисті проєктів та під час групових форм навчальної діяльності [12 МАО 4.3.1-1 П] (в основі орієнтир «використовує математичні поняття, факти і процедури, пояснює застосування їх, наводить аргументи»); - описує проблемну ситуацію за допомогою модельного графа, формулює припущення щодо його властивостей [12 МАО 4.3.2-1 П] (в основі орієнтир «описує проблемну ситуацію математичною мовою, формулює припущення»).		
Тема 2. Ейлерові графи.		
<i>Учень / учениця:</i> - виокремлює в задачі складову, пов'язану з обходом зв'язного графа без повторення ребер [12 МАО 1.1.1-2 П] (в основі орієнтир для оцінювання «виокремлює в конкретній специфічній проблемній ситуації її складові частини, які можуть бути розв'язані математичними методами»); - пропонує різні підходи до моделювання задачі у вигляді ейлерового графа та різні	2.1. Ейлерові графи: - означення ейлерових графів; - необхідна умова ейлеровості графа (кількість непарних вершин дорівнює 2 або 0); - доведення того, що граф не є ейлеровим; - розбиття графа на ейлерові частини. 2.2. Критерій ейлерових графів: - ейлерові цикли; - достатня умова існування ейлерових циклів;	Створення та застосування опорних конспектів за змістом теми. Дискусія. Обговорення. Усне опитування. Робота в парах з елементами взаємонавчання. Робота в малих групах. Індивідуальна робота із практичними завданнями.

варіанти його обходу [12 МАО 1.3.2-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «пропонує альтернативні шляхи досягнення результатів розв’язання специфічної проблемної ситуації, оцінює можливі ризики»); - виявляє ініціативу, пропонує ідеї щодо знаходження ейлерових шляхів та/або циклів, алгоритмів для їх реалізації [12 МАО 2.2.1-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «виявляє ініціативу, пропонує та обґрунтовує ідеї щодо способу розв’язання специфічних проблемних ситуацій»); - обирає ейлерові шляхи з додатковими обмеженнями на початок та кінець маршруту, самостійно знаходить відповідні обмеження, виходячи з умови завдання [12 МАО 2.2.2-1 П] (в основі орієнтир «обирає серед кількох різних стратегій розв’язання специфічних проблемних ситуацій таку, що задовольняє певні умови»); - формулює умову практичної задачі мовою графів та інтерпретує результати щодо моделі-графа в термінах даної практичної задачі [12 МАО 2.3.1-2 П] (в основі орієнтир «здійснює перехід від абстрактного до конкретного та від конкретного до абстрактного»); - самостійно, під час виконання групової та/або проєктної роботи будує математичну модель у вигляді ейлерового графа, створює алгоритм та/або програму для його обходу [12	- ейлерові шляхи; - достатня умова існування ейлерових шляхів; - критерій ейлерових графів; - унікурсальні криві. 2.3. Розв’язування практичних задач з ейлеровими / не ейлеровими графами.	Робота з компетентнісно орієнтованими завданнями. Демонстрація прикладів розглянутих математичних фактів у житті. Ігрова діяльність. Проектна діяльність.
---	--	---

МАО 2.3.2-1 П] (в основі орієнтир «самостійно або у співпраці з іншими будує математичні моделі специфічних проблемних ситуацій, добирає математичні засоби для побудови моделей, ураховуючи можливі ризики»); - конструктивно співпрацює з членами групи задля досягнення спільної мети: розв’язання задач про ейлерові граfi евристичними та/або комп’ютерними методами [12 МАО 2.4.2-1 П] (в основі орієнтир «заохочує і підтримує членів групи під час представлення та обговорення результатів, конструктивно реагує на критику»); - формулює задачу в термінах ейлерових графів, урахує додаткові обмеження на початок та кінець маршруту[12 МАО 3.2.2-1 П] (в основі орієнтир «обирає математичну модель розв’язання специфічної проблемної ситуації з урахуванням різних умов»); - застосовує властивості неорієнтованих графів, унікурсальних кривих, матриць суміжності [12 МАО 4.1.1-1 П] (в основі орієнтир «пов’язує різні математичні знання і вміння, узагальнює їх, робить висновки»); - описує ситуацію у вигляді ейлерових графів (циклів), задає обмеження мовою графів відповідно до умови практичної задачі [12 МАО 4.2.1-1 П] (в основі орієнтир «добирає доцільні математичні поняття, факти і послідовність дій для розв’язання проблемних ситуацій»);		
--	--	--

- розв'язує задачі з використанням теореми Ейлера, розрізняє коректність послідовності дій для ситуацій, коли обхід можливий/не можливий, перевіряє правильність знайденого маршруту [12 MAO 4.2.1-2 П] (в основі орієнтир «реалізовує визначену послідовність дій для розв'язання специфічних проблемних ситуацій, перевіряє та досліджує отримані результати»); - використовує теорему Ейлера, знаходить можливі початок та кінець маршруту, пояснює свій вибір [12 MAO 4.3.1-1 П] (в основі орієнтир «використовує математичні поняття, факти і процедури, пояснює застосування їх, наводить аргументи»); - обґрунтовано пояснює хід свого розв'язання задачі про унікурсальні криві, аналізує результати інших учнів/учениць [12 MAO 4.3.2-2 П] (в основі орієнтир «обґрунтовано пояснює хід своїх міркувань, зважаючи на мету і учасників спілкування»).		
Тема 3. Дерева.		
<i>Учень / учениця:</i> - вирізняє задачі, які моделюються за допомогою зв'язних графів без циклів або їх об'єднань [12 MAO 1.1.1-1 П] (в основі орієнтир «вирізняє специфічні проблемні ситуації, які можуть бути розв'язані математичними методами»); - виокремлює складові частини задачі, що стосуються моделі у вигляді графа дерева,	3.1. Означення дерева: - дерево та ліс; - прості шляхи в дереві; - критерій дерева (існування єдиного простого шляху між будь-якими двома вершинами). 3.2. Кількість ребер у дереві: - висячі вершини, теорема про існування висячої вершини в дереві;	Створення та застосування опорних конспектів за змістом теми. Дискусія. Обговорення. Усне опитування. Робота в парах з елементами взаємонавчання. Робота в малих групах.

або кістякового дерева у зв'язному графі [12 МАО 1.1.1-2 П] (орієнтир «виокремлює в конкретній специфічній проблемній ситуації її складові частини, які можуть бути розв'язані математичними методами»); - виокремлює спільні ознаки задач на застосування дерева, зокрема, як мінімального зв'язного графа на даних вершинах [12 МАО 1.1.2-1 П] (в основі орієнтир «самостійно або у взаємодії з іншими виокремлює спільні ознаки специфічних проблемних ситуацій, для розв'язання яких можна застосувати подібні методи»); - формулює припущення щодо моделі реальної задачі у вигляді графа/зв'язного графа/дерева/лісу [12 МАО 1.2.3-1 П] (в основі орієнтир «визначає межі даних, формулює припущення щодо даних у специфічних проблемних ситуаціях»); - виявляє ініціативу, пропонує та обґрунтовує способи розв'язання задач, зокрема практичних, за допомогою дерева [12 МАО 2.2.1-1 П] (в основі орієнтир «виявляє ініціативу, пропонує та обґрунтовує ідеї щодо способу розв'язання специфічних проблемних ситуацій»); - описує розв'язання задачі для моделі «граф-дерево» з урахуванням додаткових обмежень [12 МАО 2.2.2-1 П] (в основі орієнтир «обирає серед кількох різних стратегій розв'язання специфічних	- кількість ребер у дереві; - кістякове дерево; - алгоритм отримання кістякового дерева за допомогою руйнування циклів; - дерево як мінімальний зв'язний граф на даних вершинах. 3.3. Застосування дерев для розв'язування практичних задач.	Індивідуальна робота із практичними завданнями. Робота з компетентнісно орієнтованими завданнями. Демонстрація прикладів розглянутих математичних фактів у житті. Ігрова діяльність. Проектна діяльність.
--	--	--

проблемних ситуацій таку, що задовольняє певні умови»); - формулює практичну задачу мовою графів-дерев та інтерпретує отримані в моделі результати в термінах початкової проблеми [12 МАО 2.3.1-2 П] (в основі орієнтир «здійснює перехід від абстрактного до конкретного та від конкретного до абстрактного»); - обирає математичну модель для розв'язання задачі у вигляді зв'язного графа/дерева/лісу [12 МАО 3.2.2-1 П] (в основі орієнтир «обирає математичну модель розв'язання специфічної проблемної ситуації з урахуванням різних умов»); - оцінює обґрунтованість математичного розв'язання за допомогою моделювання у вигляді графа, урахування всієї специфіки початкової проблеми [12 МАО 3.2.3-1 П] (в основі орієнтир «оцінює обґрунтованість математичного розв'язання в контексті реальної комплексної проблемної ситуації»); - визначає та усуває прогалини у власних математичних знаннях і вміннях щодо розв'язування комбінаторних задач [12 МАО 4.1.3-1 П] (в основі орієнтир «визначає та усуває прогалини у власних математичних знаннях і вміннях у специфічних проблемних ситуаціях»); - добирає доцільні означення, факти, алгоритми щодо дерев, для використання при розв'язанні задач [12 МАО 4.2.1-1 П] (в основі орієнтир «добирає доцільні		
---	--	--

математичні поняття, факти і послідовність дій для розв’язання проблемних ситуацій»); - реалізовує визначений алгоритм для мінімізації кількості ребер у зв’язному графі, знаходження кістякового дерева тощо та досліджує отримані результати [12 МАО 4.2.1-2 П] (в основі орієнтир «реалізовує визначену послідовність дій для розв’язання специфічних проблемних ситуацій, перевіряє та досліджує отримані результати»); - використовує поняття дерево, ліс, кістякове дерево, їхні властивості, наводить аргументи щодо доцільності застосування тих чи інших фактів [12 МАО 4.3.1-1 П] (в основі орієнтир «використовує математичні поняття, факти і процедури, пояснює застосування їх, наводить аргументи»); - моделює задачу із застосуванням графа дерева, формулює припущення щодо результатів застосування властивостей дерев [12 МАО 4.3.2-1 П] (в основі орієнтир «описує проблемну ситуацію математичною мовою, формулює припущення»); - обґрунтовано пояснює хід застосування властивостей дерев, ураховує пропозиції інших учнів/учениць [12 МАО 4.3.2-2 П] (в основі орієнтир «обґрунтовано пояснює хід своїх міркувань, зважаючи на мету і учасників спілкування»).		
Тема 4. Плоскі графи.		

<i>Учень / учениця:</i> - вирізняє задачі на використання плоских графів [12 МАО 1.1.1-1 П] (в основі орієнтир «вирізняє специфічні проблемні ситуації, які можуть бути розв’язані математичними методами»); - виокремлює в графі-моделі задачі частини, для дослідження яких доцільно застосувати формулу Ейлера, теорему Понтрягіна-Куратовського або їхні наслідки [12 МАО 1.1.1-2 П] (в основі орієнтир «виокремлює в конкретній специфічній проблемній ситуації її складові частини, які можуть бути розв’язані математичними методами»); - визначає межі даних, формулює припущення щодо даних у специфічних проблемних ситуаціях [12 МАО 1.2.3-1 П]; - визначає дії при застосуванні властивостей плоских графів у випадку планарних/не планарних графів, алгоритм застосування формули Ейлера для багатогранників [12 МАО 1.3.1-1 П] (в основі орієнтир «визначає типи можливих результатів розв’язання специфічної проблемної ситуації»); - пропонує різні шляхи розв’язання задач з урахуванням як теореми Ейлера, так і специфіки задачі, відокремлює поняття «грань» та «скінченна грань» [12 МАО 1.3.2-1 П] (в основі орієнтир «пропонує альтернативні шляхи досягнення результатів розв’язання специфічної	4.1. Плоскі та планарні графи: - плоскі графи, грані плоского графа; - планарні графи; - формула Ейлера для плоских графів; - доведення формули Ейлера з використанням властивостей дерев. 4.2. Наслідки формули Ейлера для плоских графів: - нерівності для кількостей ребер, граней, вершин для плоских графів; - непланарність графа «три будинки та три колодязі» (доведення за допомогою теореми Ейлера та факту, що у кожному циклі відповідного графа не менше від чотирьох ребер); - непланарність повного графа на 5 вершинах. 4.3. Теорема Понтрягіна-Куратовського (оглядово). 4.4. Практичне застосування планарних графів. 4.5. Формула Ейлера для багатогранників. Правильні багатогранники: - формулювання теореми Ейлера для багатогранників; - доведення теореми Ейлера для багатогранників із використанням властивостей планарних графів; - означення правильного багатогранника; - знаходження п’яти видів правильних багатогранників та їхніх параметрів за допомогою теореми Ейлера.	Створення та застосування опорних конспектів за змістом теми. Дискусія. Обговорення. Усне опитування. Робота в парах з елементами взаємонавчання. Робота в малих групах. Індивідуальна робота із практичними завданнями. Робота з компетентнісно орієнтованими завданнями. Демонстрація прикладів розглянутих математичних фактів у житті. Ігрова діяльність. Проектна діяльність.
---	---	---

проблемної ситуації, оцінює можливі ризики»); - під час групових та проєктних форм навчальної діяльності виявляє ініціативу, пропонує й обґрунтовує доцільність застосування теореми Ейлера та/або теореми Понтрягіна-Куратовського [12 МАО 2.2.1-1 П] (в основі орієнтир «виявляє ініціативу, пропонує та обґрунтовує ідеї щодо способу розв'язання специфічних проблемних ситуацій»); - при виборі способу розв'язання задач про планарні граfi враховує додаткові обмеження на кількість ребер у гранях, інформацію щодо скінченних граней тощо [12 МАО 2.2.2-1 П] (в основі орієнтир «обирає серед кількох різних стратегій розв'язання специфічних проблемних ситуацій таку, що задовольняє певні умови»); - моделює практичні задачі у вигляді плоского графа, порівнює його властивості з властивостями геометричних фігур, що утворюють грані [12 МАО 2.3.2-1 П] (в основі орієнтир «самостійно або у співпраці з іншими будує математичні моделі специфічних проблемних ситуацій, добирає математичні засоби для побудови моделей, ураховуючи можливі ризики»); - конструктивно співпрацює з іншими учнями/ученицями під час групової та/або проєктної діяльності щодо дослідження та застосування планарних		
---	--	--

графів [12 МАО 2.4.2-1 П] (в основі орієнтир «заохочує і підтримує членів групи під час представлення та обговорення результатів, конструктивно реагує на критику»); - обирає математичну модель у вигляді геометричного об'єкту або графа та використовує відповідний варіант формули Ейлера [12 МАО 3.2.2-1 П] (в основі орієнтир «обирає математичну модель розв'язання специфічної проблемної ситуації з урахуванням різних умов»); - складає алгоритм розв'язання задачі про плоскі графи та/або багатогранники, використовуючи теорему Ейлера та її наслідки [12 МАО 4.2.1-1 П] (в основі орієнтир «добирає доцільні математичні поняття, факти і послідовність дій для розв'язання проблемних ситуацій»); - реалізовує алгоритм по застосуванню формули Ейлера та/або теореми Понтрягіна-Куратовського та досліджує отримані результати у термінах початкової проблеми [12 МАО 4.2.1-2 П] (в основі алгоритм «реалізовує визначену послідовність дій для розв'язання специфічних проблемних ситуацій, перевіряє та досліджує отримані результати»); - пояснює доцільність використання формули Ейлера, обґрунтовує логічні коки розв'язання задач на її основі [12 МАО 4.3.1-1 П] (в основі орієнтир «використовує математичні поняття,		
--	--	--

факти і процедури, пояснює застосування їх, наводить аргументи»); - створює математичну модель задачі, описує припущення у термінах плоских графів або багатогранників [12 МАО 4.3.2-1 П] (в основі орієнтир «описує проблемну ситуацію математичною мовою, формулює припущення»); - обґрунтовує свої міркування, враховує пропозиції інших учнів/учениць щодо вдосконалення способу розв'язання задач на формулу Ейлера [12 МАО 4.3.22 П] (в основі орієнтир «обґрунтовано пояснює хід своїх міркувань, зважаючи на мету і учасників спілкування»).		
Тема 5. Дводольні графи.		
<i>Учень / учениця:</i> - вирізняє ситуації з об'єктами двох типів, що можна змодельовати у вигляді дводольного графа [12 МАО 1.1.1-1 П] (в основі орієнтир «вирізняє специфічні проблемні ситуації, які можуть бути розв'язані математичними методами»); - виділяє в математичній моделі задачі дводольний граф при розбитті за певною ознакою [12 МАО 1.1.1-2 П] (в основі орієнтир «виокремлює в конкретній специфічній проблемній ситуації її складові частини, які можуть бути розв'язані математичними методами»); - самостійно або разом з іншими учнями/ученицями виділяє спільні ознаки задач на застосування властивостей дводольних графів [12	5.1. Дводольні (або двочасткові/бінарні) графи: - означення дводольного графа, приклади дводольних графів; - виділення долей дводольного графа за допомогою розфарбовування вершин; - дерево як дводольний граф; - кількість ребер у дводольному графі; - критерій дводольного графа: відсутність циклів непарної довжини. 5.2. Лема Холла: - формулювання леми Холла. 5.3. Доведення леми Холла. 5.4. Практичне застосування дводольних графів.	Створення та застосування опорних конспектів за змістом теми. Дискусія. Обговорення. Усне опитування. Робота в парах з елементами взаємонавчання. Робота в малих групах. Індивідуальна робота із практичними завданнями. Робота з компетентнісно орієнтованими завданнями. Демонстрація прикладів розглянутих математичних фактів у житті. Ігрова діяльність. Проектна діяльність.

МАО 1.1.2-1 П] (в основі орієнтир «самостійно або у взаємодії з іншими виокремлює спільні ознаки специфічних проблемних ситуацій, для розв’язання яких можна застосувати подібні методи»); - при застосуванні властивостей дводольних графів як моделі реальної ситуації, оцінює повноту та достовірність інформації й її трансформацію у моделі [12 МАО 1.2.1 3 П] (в основі орієнтир «оцінює повноту і достовірність інформації»); - пропонує різні способи розв’язання задачі з розбиттям вершин на дві долі [12 МАО 1.3.2-1 П] (в основі орієнтир «пропонує альтернативні шляхи досягнення результатів розв’язання специфічної проблемної ситуації, оцінює можливі ризики»); - під час групової або проектної навчальної діяльності будує математичну модель задачі у вигляді дводольного графа [12 МАО 2.3.2-1 П] (в основі орієнтир «самостійно або у співпраці з іншими будує математичні моделі специфічних проблемних ситуацій, добирає математичні засоби для побудови моделей, ураховуючи можливі ризики»); - конструктивно співпрацює з іншими учнями/ученицями під час представлення та обговорення конкретних застосувань дводольних графів [12 МАО 2.4.2-1 П] (в основі		
--	--	--

орієнтир «заохочує і підтримує членів групи під час представлення та обговорення результатів, конструктивно реагує на критику»); - оцінює обґрунтованість застосування дводольних графів та їхніх властивостей при розв'язування практичних задач [12 МАО 3.2.3-1 П] (в основі орієнтир «оцінює обґрунтованість математичного розв'язання в контексті реальної комплексної проблемної ситуації»); - коректно застосовує критерій дводольного графа, розбиття на долі, лему Холла [12 МАО 4.2.1-2 П] (в основі орієнтир «реалізовує визначену послідовність дій для розв'язання специфічних проблемних ситуацій, перевіряє та досліджує отримані результати»); - використовує поняття дводольного графа, його властивостей, алгоритмів з пошуку розбиття вершин на пари [12 МАО 4.3.1-1 П] (в основі орієнтир «використовує математичні поняття, факти і процедури, пояснює застосування їх, наводить аргументи»); - описує реальну ситуацію за допомогою дводольних графів, зокрема, дерев, окремих видів планарних графів тощо [12 МАО 4.3.2-1 П] (в основі орієнтир «описує проблемну ситуацію математичною мовою, формулює припущення»); - обґрунтовано пояснює розв'язання проблеми за допомогою властивостей та		
---	--	--

ознак дводольного графа, враховуючи міркування інших учнів/учениць [12 МАО 4.3.2-2 П] (в основі орієнтир «обґрунтовано пояснює хід своїх міркувань, зважаючи на мету і учасників спілкування»).		
Тема 6. Графи з розфарбованими ребрами.		
<i>Учень / учениця: - вирізняє задачі, де між об'єктами існують зв'язки двох або більше типів [12 МАО 1.1.1-1 П] (в основі орієнтир «вирізняє специфічні проблемні ситуації, які можуть бути розв'язані математичними методами»); - самостійно або разом із іншими учнями/ученицями виокремлює задачі, які можна змодельовати за допомогою графа з розфарбованими ребрами або розфарбованими вершинами [12 МАО 1.1.2-1 П] (в основі орієнтир «самостійно або у взаємодії з іншими виокремлює спільні ознаки специфічних проблемних ситуацій, для розв'язання яких можна застосувати подібні методи»); - формулює практичну задачу за допомогою розфарбованих графів та інтерпретує результати моделювання у термінах початкової задачі [12 МАО 2.3.1-2 П] (в основі орієнтир «здійснює перехід від абстрактного до конкретного та від конкретного до абстрактного»); - самостійно або разом із іншими учнями/ученицями будує моделі</i>	6.1. Графи з розфарбованими ребрами: - графи з розфарбованими ребрами, розфарбування графа; - поняття про правильне розфарбування та хроматичний індекс; - задача про розфарбування у 4 кольори мапи на площині; - принцип Діріхле, задачі Рамсея та графи з розфарбованими ребрами; - числа Рамсея. 6.2. Розв'язування практичних задач про графи з розфарбованими ребрами.	Створення та застосування опорних конспектів за змістом теми. Дискусія. Обговорення. Усне опитування. Робота в парах з елементами взаємонавчання. Робота в малих групах. Індивідуальна робота із практичними завданнями. Робота з компетентісно орієнтованими завданнями. Демонстрація прикладів розглянутих математичних фактів у житті. Ігрова діяльність. Проектна діяльність.

реальних ситуацій у вигляді розфарбованих графів, добирає потрібні факти як про графи, так і з інших розділів математики, зокрема принцип Діріхле [12 МАО 2.3.2-1 П] (в основі орієнтир «самостійно або у співпраці з іншими будує математичні моделі специфічних проблемних ситуацій, добирає математичні засоби для побудови моделей, ураховуючи можливі ризики»); - конструктивно співпрацює з іншими учнями/ученицями під час представлення та обговорення понять «хроматичний індекс», «розфарбування мапи», числа Рамсея [12 МАО 2.4.2-1 П] (в основі орієнтир «заохочує і підтримує членів групи під час представлення та обговорення результатів, конструктивно реагує на критику»); - будує математичну модель практичної задачі у вигляді розфарбованого графа з урахуванням обмежень на степені вершин графа [12 МАО 3.2.2-1 П] (в основі орієнтир «обирає математичну модель розв'язання специфічної проблемної ситуації з урахуванням різних умов»); - реалізовує визначений алгоритм розв'язання задач на розфарбовані графи з урахуванням їхніх властивостей [12 МАО 4.2.1-2 П] (в основі орієнтир «реалізовує визначену послідовність дій для розв'язання специфічних проблемних ситуацій, перевіряє та		
--	--	--

досліджує отримані результати»); - використовує різні форми створення математичної моделі у вигляді графа з розфарбованими ребрами або вершинами [12 МАО 4.2.2-2 П] (в основі орієнтир «використовує різні форми подання математичних об'єктів відповідно до специфіки проблемної ситуації»); - описує практичну ситуацію у вигляді скінченного розфарбованого графа [12 МАО 4.3.2-1 П] (в основі орієнтир «описує проблемну ситуацію математичною мовою, формулює припущення»); - обґрунтовує хід розв'язання задачі про розфарбовані графи, враховуючи зауваження та пропозиції інших учнів/учениць [12 МАО 4.3.2-2 П] (в основі орієнтир «обґрунтовано пояснює хід своїх міркувань, зважаючи на мету і учасників спілкування»).		
Тема 7. Орієнтовані графи та їхнє застосування.		
<i>чень / учениця: - вирізняє задачі, які можна змодельовати у вигляді орграфа [12 МАО 1.1.1-1 П] (в основі орієнтир «вирізняє специфічні проблемні ситуації, які можуть бути розв'язані математичними методами»); - самостійно або разом з іншими учнями/ученицями виокремлює задачі, пов'язані з орієнтацією ребер графа, таких, як рух з одностороннім напрямком [12 МАО 1.1.2-1 П] (в основі</i>	7.1. Орієнтовані графи: - означення орієнтованого графа, шляхи та цикли в орграфі; - приклади орієнтованих графів; - витоки та глухі кути орграфа; - теорема про існування витоків та глухих кутів у скінченному орграфі без циклів. 7.2. Кореневі дерева: - кореневі дерева, корінь та орієнтація ребер;	Створення та застосування опорних конспектів за змістом теми. Дискусія. Обговорення. Усне опитування. Робота в парах з елементами взаємонавчання. Робота в малих групах. Індивідуальна робота із практичними завданнями.

орієнтир «самостійно або у взаємодії з іншими виокремлює спільні ознаки специфічних проблемних ситуацій, для розв'язання яких можна застосувати подібні методи»); - виявляє ініціативу, пропонує різні моделі та алгоритми щодо дослідження орієнтованих графів [12 МАО 2.2.1-1 П] (в основі орієнтир «виявляє ініціативу, пропонує та обґрунтовує ідеї щодо способу розв'язання специфічних проблемних ситуацій»); - самостійно або разом з іншими учнями/ученицями створює математичні моделі у вигляді орієнтованих графів та їхніх елементів, добирає засоби для представлення відповідної інформації – масиви, «кореневі дерева» тощо [12 МАО 2.3.2-1 П] (в основі орієнтир «самостійно або у співпраці з іншими будує математичні моделі специфічних проблемних ситуацій, добирає математичні засоби для побудови моделей, урахувуючи можливі ризики»); - конструктивно співпрацює з іншими учнями/ученицями під час розв'язування задач на застосування орграфів, зокрема, при дослідженні ігор [12 МАО 2.4.2-1 П] (в основі орієнтир «заохочує і підтримує членів групи під час представлення та обговорення результатів, конструктивно	- «дерево пошуку в ширину», «підвішування зв'язного графа за вершину»; - «дерево пошуку в глибину»; - існування «дерева пошуку в глибину» для зв'язних графів. 7.3. Розв'язування практичних задач із орієнтованими графами. 7.4. Застосування кореневих дерев: - алгоритм пошуку компонента зв'язності; - алгоритм пошуку ейлерових шляхів та циклів; - алгоритм пошуку гамільтонових шляхів та циклів; - алгоритм пошуку найкоротшого шляху між двома вершинами. 7.5. Моделювання ігор за допомогою орграфів: - початок та кінець гри як витоки та глухі кути орграфа; - виграшні та програшні позиції в грі як вершини орграфа; - аналіз «із кінця» гри на орієнтованому графі; - алгоритм знаходження виграшної стратегії за допомогою орграфів. 7.6. Дослідження ігор за допомогою орграфів: - застосування одновимірних масивів для моделювання орграфа гри; - застосування двовимірних масивів для моделювання орграфа гри; - застосування тривимірних масивів для моделювання орграфа гри;	Робота з компетентнісно орієнтованими завданнями. Демонстрація прикладів розглянутих математичних фактів у житті. Ігрова діяльність. Проектна діяльність.
--	--	---

реагує на критику»); - оцінює обґрунтованість застосування моделі-орґрафа та складність алгоритмів пошуку [12 МАО 3.2.3-1 П] (в основі орієнтир «оцінює обґрунтованість математичного розв'язання в контексті реальної комплексної проблемної ситуації»); - пов'язує математичні знання з теорії орієнтованих та неорієнтованих графів, комбінаторики, систем числення та робить висновки щодо ефективності їх комплексного застосування [12 МАО 4.1.1-1 П] (в основі орієнтир «пов'язує різні математичні знання і вміння, узагальнює їх, робить висновки»); - робить висновки щодо застосування витоків та глухих кутів при математичному моделюванні ігор [12 МАО 4.1.2-1 П] (в основі орієнтир «робить висновки щодо застосування математичних понять і фактів»); - реалізовує визначений алгоритм пошуку в орієнтованому графі та перевіряє правильність отриманих результатів різними методами [12 МАО 4.2.1-2 П] (в основі орієнтир «реалізовує визначену послідовність дій для розв'язання специфічних проблемних ситуацій, перевіряє та досліджує отримані результати»); - використовує ІКТ для реалізації алгоритмів у моделях-орґафах	- знаходження виграшних стратегій за допомогою орґрафів. 7.7. Гра «Нім»: - формулювання гри «Нім»; - дослідження гри «Нім» для двовимірного випадку за допомогою орґрафів; - застосування двійкової системи числення для дослідження гри «Нім»; - «Нім-суми»; - виграшна стратегія в грі «Нім». 7.8. Функція Шпрага-Гранді: - означення функції Шпрага-Гранді; - теорема Шпрага-Гранді (без доведення); - приклад застосування теореми Шпрага-Гранді; - сума ігор та функція Шпрага-Гранді. 7.9. Гра «Цзяньшицзи»: - формулювання гри «Цзяньшицзи»; - дослідження гри «Цзяньшицзи» за допомогою орґрафів; - фібоначівська система числення; - застосування фібоначівської системи числення для дослідження гри «Цзяньшицзи»; - виграшна стратегія у грі «Цзяньшицзи».	
---	--	--

<i>[12 МАО 4.2.3-1 П] (в основі орієнтир «використовує приладдя та інформаційно-комунікаційні технології для представлення результату у специфічних проблемних ситуаціях»); - використовує поняття графа, його елементів, алгоритми пошуку, наводить аргументи на користь конкретного алгоритма [12 МАО 4.3.1-1 П] (в основі орієнтир «використовує математичні поняття, факти і процедури, пояснює застосування їх, наводить аргументи»); - описує практичну задачу у термінах орієнтованого графа та його елементів [12 МАО 4.3.2-1 П] (в основі орієнтир «описує проблемну ситуацію математичною мовою, формулює припущення»); - обґрунтовано пояснює хід розв'язання задачі, зважаючи на зауваження та пропозиції інших учнів/учениць щодо ефективності та коректності використання представленого алгоритма [12 МАО 4.3.2-2 П] (в основі орієнтир «обґрунтовано пояснює хід своїх міркувань, зважаючи на мету і учасників спілкування»).</i>		
--	--	--

ПРИКІНЦЕВА ЧАСТИНА

Орієнтовний розподіл годин на вивчення тем курсу

<i>№ теми</i>	<i>Назва теми</i>	<i>Орієнтовна кількість годин на вивчення</i>
1	Неорієнтовані графи та їхні найпростіші властивості	6
2	Ейлерові графи	4
3	Дерева	4
4	Плоскі графи	6
5	Дводольні графи	3
6	Графи з розфарбованими ребрами	2
7	Орієнтовані графи та їхнє застосування	9
Разом		34

Особливості реалізації курсу в освітньому процесі

Реалізація курсу «Теорія графів» здійснюється на основі компетентнісного, діяльнісного та особистісно орієнтованого підходів. Зміст і організація навчання спрямовані на формування ключових і предметних математичних компетентностей, розвиток логічного, алгоритмічного та критичного мислення, уміння моделювати реальні ситуації засобами математики.

Важливою особливістю курсу є поєднання теоретичного матеріалу з практичним застосуванням. Під час навчання учнівство розв'язує задачі прикладного характеру, що передбачають:

- моделювання реальних процесів за допомогою графів;
- дослідження задач оптимізації, маршрутизації, планування;
- використання методів теорії графів у програмуванні;
- застосування графових моделей у соціально-економічних, технологічних і природничих контекстах.

Організація навчальної діяльності передбачає використання різних форм роботи: індивідуальної, парної та групової. Значна увага приділяється дослідницьким і творчим проєктам, що сприяють розвитку ініціативності, відповідальності, уміння співпрацювати та презентувати результати. Доцільним є використання цифрових інструментів (систем динамічної математики, середовищ програмування, онлайн-платформ, інтерактивних сервісів) для візуалізації графів, перевірки гіпотез, створення алгоритмів та проведення експериментів.

У процесі вивчення курсу забезпечується постійний зв'язок між формальною математичною мовою та описом реальних або ігрових ситуацій. Це сприяє усвідомленню ролі математичного моделювання та розвитку вміння переходити від практичної задачі до абстрактної моделі й навпаки.

Курс має виражений міжпредметний характер і реалізує, зокрема, інтеграційний потенціал профілю з поглибленим вивченням математики, інформатики, технологій STEM-кластеру. Так, для успішної реалізації проєктів з багатьох тем курсу доцільно узгодити їхній зміст із вивченням відповідних алгоритмів, структур даних, елементів програмування. При оцінюванні навчальних досягнень перевага має надаватися оцінюванню процесу навчання, прогресу учнівства, умінню застосовувати знання в нових ситуаціях, аргументувати міркування, працювати в команді, застосовувати математику у програмуванні й навпаки.

Також програмою курсу передбачене гнучке планування навчального часу: можливість перерозподілу годин між темами, виділення окремих занять для практикумів, проєктної діяльності, дискусій та захисту робіт. Учитель/вчителька має академічну свободу у виборі прикладів, задач, методів, форм і засобів навчання, що забезпечує адаптацію курсу до освітніх потреб конкретного закладу та індивідуальних особливостей учнівства.

Реалізація курсу спрямована на створення підґрунтя для подальшого поглибленого вивчення математики, інформатики, участі в олімпіадах і науково-дослідницькій діяльності, а також для практичного застосування математичних моделей у різних сферах сучасного життя.

Оцінювання результатів навчання

Основними видами оцінювання результатів навчання учнів є формувальне, поточне та підсумкове (тематичне, річне).

Формувальне оцінювання здійснюється на всіх етапах роботи учнів і передбачає систематичний зворотний зв'язок щодо процесу засвоєння знань і вироблення вмінь. Оцінюванню підлягають як процес, так і результат навчальної діяльності.

Поточне оцінювання передбачає відстеження рівня засвоєння навчального матеріалу на уроку та між уроками. Здійснюється через:

- усне опитування (індивідуальне, групове, фронтальне);
- письмові завдання (самостійні, контрольні, вправи з розв'язування задач, у тому числі практичного змісту і т.д.);
- цифрові форми (онлайн-тести, робота з інтерактивними тренажерами, використання відкритого програмного забезпечення);
- практичні роботи (робота з алгоритмами, створення поточних проєктів, моделювання даних).

Підсумкове оцінювання проводиться у формі контрольних і тематичних робіт, виконання тестових завдань, а також через виконання учнівських проєктів. За необхідності можна провести наприкінці курсу комплексне підсумкове оцінювання з урахуванням матеріалу всіх тем, що вивчалися, зокрема, із застосуванням тестових та проєктних технологій.

Оцінюванню підлягають:

- здатність учня/учениці застосовувати теоретичні знання на практиці;
- уміння працювати з цифровими інструментами та програмним забезпеченням;
- вміння аналізувати, відбирати та коректно використовувати інформацію;
- здатність до роботи з даними (структурування, візуалізація, пошук закономірностей);
- культура цифрової комунікації, безпечна поведінка в інформаційному середовищі;
- вміння працювати індивідуально та в команді над спільними завданнями.

Особливістю цієї Програми є можливість виконання учнівського проєкту як альтернативи традиційній контрольній роботі чи тестуванню. Такий формат дозволяє оцінювати не лише рівень засвоєння знань, а й уміння застосовувати їх у практичній діяльності, здатність до самостійного пошуку та аналізу інформації, творчість і командну взаємодію.

Орієнтовні критерії оцінювання учнівських проєктів.

1. Актуальність і постановка проблеми (0–2 бали):

- чітке визначення теми, завдань і цілей проєкту;
- обґрунтування вибору інструментів.

2. Теоретична база та використані знання (0–2 бали):

- застосування вивчених понять з теорії графів та відповідних властивостей, теорем, алгоритмів;
- використання базових і розширених знань з алгебри, комбінаторики та теорії графів.

3. Технічна реалізація (0–4 бали):

- якість розв'язання проблеми (структурованість, коментарі, оптимальність);

- виконання необхідних покрокових розрахунків у класичний спосіб або за допомогою цифрових інструментів;
- правильність і відсутність критичних помилок.

4. Творчість і самостійність (0–2 бали):

- оригінальність ідеї реалізації мети проєкту;
- ступінь самостійного виконання роботи;
- дотримання принципів академічної доброчесності.

5. Презентація та захист проєкту (0–2 бали):

- здатність учня/учениці пояснити принципи реалізації проєкту та обґрунтувати обрані методи;
- якість візуалізації результатів (формули, таблиці, блок-схеми, демонстрація роботи програми тощо).

Максимальна кількість балів – 12.

Використані джерела

- 1) Державний стандарт базової середньої освіти : затв. постановою Кабінету Міністрів України від 30 вересня 2020 р. № 898. URL: <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/898-2020-%D0%BF#Text> (дата звернення: 27.12.2025).
- 2) Державний стандарт профільної середньої освіти : затв. постановою Кабінету Міністрів України від 25.07.2024 р. No 851. URL: <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/851-2024-%D0%BF#Text> (дата звернення: 11.02.2026).
- 3) Друшляк М.Г., Лукашова Т.Д., Скасків Л.В. Навчання майбутніх вчителів математики розв’язувати задачі теорії графів із використанням GEOGEBRA. Фізико-математична освіта. 2019. Випуск 1(19). С. 35-40.
- 4) Концептуальні засади математичної освітньої галузі : затв. наказом Міністерства освіти і науки України від 20.08.2025 р. No 1163 URL: <https://mon.gov.ua/npa/pro-zatverdzhennia-kontseptualnykh-zasad-osvitnikh-haluzei-ta-dorozhnoi-karty-realizatsii-kontseptualnykh-zasad-osvitnikh-haluzei-na-2025-2030-roky> (дата звернення: 11.02.2026).
- 5) Методичні рекомендації для розроблення модельних навчальних програм : додаток до листа Міністерства освіти і науки України

від 24.03.2021 року № 4.5/637-21. URL: <https://mon.gov.ua/static-objects/mon/sites/1/rizne/2021/03/25/metod.pdf> (дата звернення: 27.12.2025).

6) Ніколаєва К.В., Койбічук В.В. Дискретний аналіз. Графи та їх застосування в економіці: Навчально-методичний посібник. Суми : УАБС НБУ, 2007. 84 с.

7) Про повну загальну середню освіту: Закон України від 16.01.2020 р. № 463-IX (зі змінами). URL: <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/463-20#n984> (дата звернення: 11.02.2026).

8) Сарана О.А. Математичні олімпіади: просте і складне поруч: Навчальний посібник. Друге видання, доповнене. Тернопіль : Навчальна книга – Богдан, 2011. 400 с.

9) Скляр І.В. Теорія графів у школі. Задачі. Київ : Шкільний світ, 2015. 128 с.

10) Теорія графів. [Електронний ресурс]: навч. посіб. для здобувачів ступеня бакалавра за освітньою програмою «Комп'ютерний моніторинг та геометричне моделювання процесів і систем» спеціальності 122 «Комп'ютерні науки»/ І.М. Кузьменко; КПП ім. Ігоря Сікорського. Електронні текстові дані (1 файл: 1,7 Мбайт). Київ : КПП ім. Ігоря Сікорського, 2020. 71 с. URL: <https://ela.kpi.ua/items/bf60d49a-09e0-419a-8755-4b360137de0b> (дата звернення: 11.02.2026).

11) Типова освітня програма закладів загальної середньої освіти III ступеня : затв. наказом Міністерства освіти і науки України від 20.06.2025 № 890. URL: <https://mon.gov.ua/npa/pro-vnesennia-zmin-do-typovoi-osvitnoi-prohramy-zakladiv-zahalnoi-serednoi-osvity-iii-stupenia> (дата звернення: 27.12.2025).

12) Типова освітня програма для 10–12 класів закладів загальної середньої освіти, які забезпечують здобуття профільної середньої освіти за академічним спрямуванням : затв. наказом Міністерства освіти і науки України від 26.05.2025 р. № 765 (зі змінами). URL: <https://mon.gov.ua/npa/pro-zatverdzhennia-typovoi-osvitnoi-prohramy-dlia-10-12-klasiv-zakladiv-zahalnoi-serednoi-osvity-iaki-zabezpechuiut-zdobuttia-profilnoi-serednoi-osvity-za-akademichnym-spriamuvanniam> (дата звернення: 11.02.2026).

13) Федак І. В. Розв'язування задач підвищеної складності з математики. Спеціальний курс : Навч. посіб. / Івано-Франківськ, 2010. 100 с.

14) Ядренко М. В. Дискретна математика. Київ : ТВіМС, 2004. 245 с.

15) Ясінський В. А. Задачі математичних олімпіад та методи їх розв'язування. Тернопіль : Навчальна книга – Богдан, 2006. 208 с.