

ПРОЄКТ

Міністерство освіти і науки України

Модельна навчальна програма
курсу за обраним профілем «Теорія чисел та її застосування.
Профільна середня освіта. Поглиблений рівень»
для закладів загальної середньої освіти

Автор: Олександр Крижановський

*Програма створена в рамках проєкту «Зміст» благодійного фонду savED
за підтримки фінської міжнародної неурядової організації Finn Church Aid*

2025

Вступна частина

Модельна навчальна програма курсу за обраним профілем «Теорія чисел та її застосування» (далі – Програма) створена з метою реалізації компетентнісного потенціалу, мети й завдань математичної освітньої галузі та призначена для викладання курсу у закладах загальної середньої освіти, які забезпечують здобуття профільної середньої освіти за академічним спрямуванням у STEM-кластері (профілі з поглибленим вивченням математики та фізики та профілі з поглибленим вивченням математики, інформатики, технологій).

Курс за обраним профілем «Теорія чисел та її застосування» (далі – Курс) реалізується за умови його вибору учнівством та закладом освіти і може викладатися у межах передбаченої кількості навчальних годин для вивчення обов’язкових освітніх компонентів за обраним профілем навчання.

Програма створена в рамках проєкту «Зміст» благодійного фонду savED за підтримки фінської міжнародної неурядової організації Finn Church Aid.

Програма *враховує наступність* та логічно продовжує реалізацію завдань математичної освіти здобувачів / здобувачок освіти, розпочату в початковій школі та 5–9 класах середньої школи, розширюючи та доповнюючи ці завдання відповідно до вікових і пізнавальних можливостей здобувачів / здобувачок освіти. Програма реалізує обов’язкові результати навчання здобувачів / здобувачок профільної середньої освіти в математичній освітній галузі, відповідно до Державного стандарту базової і повної загальної середньої освіти.

Основою для формулювання очікуваних результатів навчання в Програмі є обов’язкові результати навчання (орієнтири для оцінювання) поглибленого рівня математичної освітньої галузі, що визначають профіль.

Метою викладання Курсу є формування математичної компетентності у взаємодії з іншими ключовими компетентностями для успішної освітньої та подальшої професійної діяльності впродовж життя, що передбачає засвоєння системи знань, удосконалення вміння розв’язувати математичні та практичні задачі. Формування математичної компетентності відбувається в поєднанні з розвитком інформаційно-комунікаційної компетентності (через роботу з програмним забезпеченням і середовищами програмування), інноваційності (під час дослідження та створення проєктів), уміння навчатися впродовж життя (завдяки підготовці та презентації власних рішень), а також компетентностей у галузі природничих наук, техніки й технологій (через практичне застосування математичних методів у різних сферах). Курс також сприяє вільному володінню державною мовою через письмове оформлення результатів досліджень, пояснення алгоритмів та участь у дискусіях. Таким чином, курс «Теорія чисел та її застосування» забезпечує інтегроване формування ключових компетентностей, визначених Державним стандартом профільної середньої освіти.

Доцільність вивчення Курсу обумовлена тим фактом, що теорія чисел, хоча і є класичним розділом математики, майже не представлена у базовому шкільному курсі. Окремі факти та методи роботи з простими та складеними числами учні / учениці опановують у 6 класі, а далі вся діяльність школярів / школярок під час вивчення алгебри в 7–9 класах зосереджується на раціональних та ірраціональних числах. Але багато теоретичних та прикладних задач передбачають роботу саме з цілими числами, адже кількість учнів / учениць у класі, кількість кроків комп'ютерної програми, пін-код банківської картки, результати застосування стандартних комбінаторних формул і т. ін. – це все цілі числа. Із розвитком сучасних інтернет-технологій класичні результати теорії чисел набули нового застосування, наприклад, вони широко використовуються у шифрах з відкритим кодом та електронному підписі.

Основними завданнями викладання Курсу є:

- сформувати в учнівства критичне та системне мислення, орієнтацію в прикладних можливостях застосування теорії чисел, вміння працювати з різними джерелами інформації, розуміння ролі теорії чисел в практичній діяльності;
- запропонувати цілісну картину теоретичних та практичних аспектів основних понять теорії чисел;
- навчити застосування методів теорії чисел у природничих, соціально-економічних навчальних предметах, а також в інформаційно-комунікаційних технологіях;
- розвивати творчість з урахуванням академічної доброчесності;
- подбати про розвиток особистості учнів / учениць та ідентичності в локальному й глобальному вимірах, осмислення їхніх цінностей;
- сприяти саморефлексивності, формувати навички врахування власних можливостей і потреб, розвивати потребу співпраці й самостійності, навчання впродовж життя;
- мотивувати учнів / учениць до дослідницької діяльності у сферах їхніх уподобань із залученням методів теорії чисел.

Зміст Курсу відповідає *ціннісним орієнтирам*, окресленим у Державному стандарті профільної середньої освіти. Під час вивчення тем Курсу акцентується увага на академічній доброчесності, розвитку відповідального ставлення до навчання, здатності до співпраці, повазі до думки інших. Курс сприяє формуванню особистості, здатної до саморозвитку, критичного мислення, самостійного вибору освітньої та професійної траєкторії. Теми Курсу також пов'язані з аналізом сучасних технологічних і соціальних процесів, що підсилює міжпредметну інтеграцію та практичне застосування математичних знань.

Основними принципами, на яких ґрунтується Програма, є:

- компетентнісний підхід: основою для програми є досягнення компетентностей, передбачених Державним стандартом у математичній освітній галузі;
- цілісність: послідовне викладення тем з урахуванням їхніх взаємозв'язків з іншими предметами математичної освітньої галузі для досягнення всіх очікуваних результатів навчання учнів / учениць, базових знань й компетентнісного потенціалу галузі;
- практична зорієнтованість: у програмі передбачена значна кількість практичної діяльності учнів / учениць та їх заохочення до проєктної діяльності, розв'язування задач практичного змісту;
- врахування вікових й індивідуальних особливостей розвитку й потреб школярів / школярок: відбувається через послідовне поглиблене вивчення тем та набуття відповідних компетентностей.

Ключовими пріоритетами викладання Курсу є:

- формування компетентностей учнів / учениць у математичній галузі, передбачених Державним стандартом;
- відведення великої частини вивчення предмету практичним, зокрема груповим, видам діяльності;
- формування й усвідомлення взаємозалежностей між математичними моделями та життєвими практичними завданнями, зокрема професійними;
- формування критичного мислення, математичної грамотності та перетворення дійсності математичною мовою;
- створення математичного інструментарію учнів / учениць для його подальшого розвитку у сфері інформаційних технологій;
- проєктна робота та діяльнісний підхід;
- академічна доброчесність вчительства та учнівства.

Структура Курсу включає 34 години і складається з дев'яти тем, з-поміж яких 1 тема – поглиблене повторення навчального матеріалу.

Особливості організації освітнього процесу для вивчення Курсу автор вбачає у тому, що вчительство вільне у виборі прикладів, задач, джерел інформації, застосуванні цифрових ресурсів, видів діяльності, методичних особливостей викладання навчального матеріалу, оскільки головним є досягнення компетентностей учнівства. Автор наводить можливі види діяльності при вивченні вказаних тем, але залишає вибір для вчителя / учительки щодо їх застосування на уроках. Можна також змінювати кількість годин для вивчення певної теми з урахуванням особливостей та потреб учнів / учениць. Найважливіше у вивченні цього Курсу – формування математичних компетентностей учнів / учениць та створення фундаменту для їхнього подальшого розвитку.

Способи реалізації Курсу охоплюють три можливі моделі розподілу навчального часу:

1) одна година на тиждень протягом навчального року (рекомендовано для 10 класу, але можлива реалізація і в 11 класі);

2) дві години на тиждень протягом навчального семестру (рекомендовано для 10 класу, але можлива реалізація в 11 класі або у першому семестрі 12 класу);

3) інтенсивне вивчення Курсу протягом терміну, що обирає заклад освіти, наприклад, три (чотири) години на тиждень (рекомендовано для 10 класу, але можлива реалізація також в 11 або 12 класі).

ОСНОВНА ЧАСТИНА

Кількість годин: 34.

Очікувані результати навчання	Пропонований зміст курсу	Види навчальної діяльності
Тема 1. Натуральні числа у шкільному курсі математики. Поглиблене повторення.		
Кількість годин: 3.		
<i>Учень / учениця:</i> - розпізнає задачі, в яких кількість має бути натуральною за замовчуванням [12 МАО 1.1.1-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «вирізняє специфічні проблемні ситуації, які можуть бути розв'язані математичними методами»); - виокремлює в компетентісно орієнтованих завданнях частину з натуральними числами [12 МАО 1.1.1-2 П] (в основі орієнтир для оцінювання «виокремлює в конкретній специфічній проблемній ситуації її складові частини, які можуть бути розв'язані математичними методами»); - самостійно, або при роботі в парах чи малих групах виявляє специфічні риси задач на застосування НСД та НСК [12 МАО 1.1.2-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «самостійно або у взаємодії з іншими виокремлює спільні ознаки специфічних проблемних ситуацій, для розв'язання яких можна застосувати подібні методи»); - добирає додаткову інформацію для розв'язування компетентісно орієнтованих завданнями [12 МАО 1.2.1-1 П] (в основі орієнтир для	1.1. Натуральні числа. Прості та складені числа. 1.2. Решето Ератосфена. 1.3. Факторизація натуральних чисел: - основна теорема арифметики; - алгоритм перебору дільників; - оцінка найменшого та найбільшого власних дільників; - використання таблиці простих чисел. 1.4. Кількість дільників числа. 1.5. НСД та його знаходження за допомогою факторизації. Взаємно прості числа. 1.6. Алгоритми Евкліда знаходження НСД. 1.7. НСК та його знаходження за допомогою факторизації. 1.8. Застосування кругів Ейлера при розв'язуванні задач про натуральні числа. 1.9. Формула НСД $(a;b) \cdot \text{НСК}(a;b) = ab$ та її використання. 1.10. Застосування НСД та НСК до розв'язування практичних задач.	Створення та застосування опорних конспектів за змістом теми. Дискусія. Обговорення. Усне опитування. Робота в парах з елементами взаємонавчання. Робота в малих групах. Індивідуальна робота із практичними завданнями. Робота з компетентісно орієнтованими завданнями. Демонстрація учнями / ученицями прикладів розглянутих математичних фактів у житті. Ігрова діяльність. Робота з використанням ІКТ.

оцінювання «досліджує специфічну проблемну ситуацію, використовуючи різноманітні інформаційні джерела»); - пояснює застосування кругів Ейлера для розв’язування задач про НСД та НСК, оцінює ефективність такого підходу [12 МАО 1.2.1-2 П] (в основі орієнтир для оцінювання «висловлює власне ставлення до здобутої інформації та нові ідеї, які виникли в результаті аналізу інформаційних джерел, наводить контраргументи»); - оцінює інформацію при розв’язуванні компетентнісних задач та під час проєктної роботи по застосуванню НСД та НСК [12 МАО 1.2.1-3 П] (в основі орієнтир для оцінювання «оцінює повноту і достовірність інформації»); - застосовує властивості простих дільників числа при перевірці даних таблиці простих чисел [12 МАО 1.2.2-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «оцінює достовірність і доцільність використання даних у специфічних проблемних ситуаціях»); - розуміє відмінність між цілими, натуральними, простими, складеними числами [12 МАО 1.3.1-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «визначає типи можливих результатів розв’язання специфічної проблемної ситуації»); - знаходить НСД двох чисел за допомогою факторизації, з використанням алгоритма Евкліда, за допомогою кругів Ейлера [12 МАО 1.3.2-		
--	--	--

1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «пропонує альтернативні шляхи досягнення результатів розв’язання специфічної проблемної ситуації, оцінює можливі ризики»); - розуміє різні форми відображення результату факторизації натурального числа [12 MAO 2.1.1-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «сприймає інформацію математичного змісту в декількох формах»); - вміє знаходити приклади використання дільників та кратних у житті [12 MAO 2.1.2-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «добирає додаткову інформацію з різних джерел і галузей знань»); - комунікує з учасниками /учасницями навчального процесу для розв’язання творчих задач на властивості цілих чисел [12 MAO 2.2.1-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «виявляє ініціативу, пропонує та обґрунтовує ідеї щодо способу розв’язання специфічних проблемних ситуацій»); - вміє створювати план роботи групи для розв’язування дослідницької проблеми з цілочисельними даними [12 MAO 2.2.3-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «планує дії та організовує роботу групи, ураховуючи розподіл ролей та оцінюючи внесок кожного»); - виокремлює дільники та кратні у компетентнісних задачах [12 MAO 2.3.1-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання		
--	--	--

«визначає компоненти математичної моделі специфічної проблемної ситуації, їх достатність і взаємозв'язки між ними»); - застосовує алгоритм знаходження кількості дільників, алгоритм Евкліда для конкретних ситуацій [12 МАО 2.3.1-2 П] (в основі орієнтир для оцінювання «здійснює перехід від абстрактного до конкретного та від конкретного до абстрактного»); - вміє критично оцінювати побудовані математичні моделі при розв'язуванні компетентнісних задач із цілочисельними даними [12 МАО 2.4.1-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «оцінює результати за наданими чи самостійно розробленими критеріями»); - активно проявляє себе під час командної роботи у парі, малій групі, при розробці навчального проєкту по використанню цілочисельних даних [12 МАО 2.4.2-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «заохочує і підтримує членів групи під час представлення та обговорення результатів, конструктивно реагує на критику»); - розрізняє суттєві дані у компетентнісних задачах з цілими числами [12 МАО 3.1.1-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «самостійно або у співпраці з іншими визначає суттєві дані в специфічній проблемній ситуації, достовірність їх»); - виявляє недостатні чи надлишкові дані, користується параметром для представлення нескінченної серії		
---	--	--

відповідей [12 МАО 3.1.2-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «визначає, яких даних недостатньо чи є надлишкові дані, під час розв’язання специфічної проблемної ситуації»); - аналізує різні підходи до знаходження НСД та НСК у різних ситуаціях, можливість їх наочного представлення [12 МАО 3.2.1-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «аналізує спільні та відмінні риси різних моделей і шляхів розв’язання специфічної проблемної ситуації»); - самостійно обирає спосіб знаходження НСД та НСК під час аналізу математичної моделі задачі [12 МАО 3.2.2-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «обирає математичну модель розв’язання специфічної проблемної ситуації з урахуванням різних умов»); - формулює та доводить теорему про добуток НСД та НСК [12 МАО 4.1.1-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «пов’язує різні математичні знання і вміння, узагальнює їх, робить висновки»); - визначає та усуває прогалини у власних знаннях та вміннях, пов’язаних із факторизацією натуральних чисел та її застосуванням [12 МАО 4.1.3-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «визначає та усуває прогалини у власних математичних знаннях і вміннях у специфічних проблемних ситуаціях»);		
--	--	--

- застосовує вивчені означення і теореми для розв'язування задач [12 МАО 4.2.1-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «добирає доцільні математичні поняття, факти і послідовність дій для розв'язання проблемних ситуацій»); - застосовує алгоритм Евкліда [12 МАО 4.2.1-2 П] (в основі орієнтир для оцінювання «реалізовує визначену послідовність дій для розв'язання специфічних проблемних ситуацій, перевіряє та досліджує отримані результати»); - використовує різні форми подання розкладу чисел множники для знаходження НСД та НСК [12 МАО 4.2.2-2 П] (в основі орієнтир для оцінювання «використовує різні форми подання математичних об'єктів відповідно до специфіки проблемної ситуації»); - вміє подати структуровану інформацію з використанням ІКТ при розв'язуванні проблемної задачі з цілочисельними даними [12 МАО 4.2.3-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «використовує приладдя та інформаційно-комунікаційні технології для представлення результату у специфічних проблемних ситуаціях»); - наводить аргументи для застосування властивостей дільників та кратних при розв'язуванні компетентнісних задач [12 МАО 4.3.1-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання		
---	--	--

«використовує математичні поняття, факти і процедури, пояснює застосування їх, наводить аргументи»); - формулює означення: дільника і кратного, НСД і НСК двох натуральних чисел, двох взаємно простих чисел, простого й складеного числа; теореми про ділення з остачею, основну теорему арифметики [12 МАО 4.3.1-2 П] (в основі орієнтир для оцінювання «аргументовано пояснює суть основних математичних понять, фактів і процедур, зважаючи на мету та учасників спілкування, обираючи для цього відповідні мовленнєві стратегії»); - вміє представляти створення математичної моделі та її використання у задачах із цілочисельними даними [12 МАО 4.3.2-2 П] (в основі орієнтир для оцінювання «обґрунтовано пояснює хід своїх міркувань, зважаючи на мету і учасників спілкування»).		
Тема 2. Лишки за модулем. Конгруєнції та їхні властивості. Кількість годин: 4.		
<i>Учень / учениця:</i> - розрізняє задачі з використанням цілих (додатних, від'ємних, нуля) чисел [12 МАО 1.1.1-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «вирізняє специфічні проблемні ситуації, які можуть бути розв'язані математичними методами»); - розуміє, в яких ситуаціях варто ділити числа з остачею [12 МАО 1.1.1-2 П] (в основі орієнтир для оцінювання «виокремлює в конкретній специфічній	2.1. Цілі числа.Dodatni числа, від'ємні числа та нуль. 2.2. Означення лишків за модулем. 2.3. Конгруєнтні числа на координатній прямій. 2.4. Ділення з остачею. Алгоритм знаходження лишків за модулем. 2.5. Властивості конгруєнцій: - додавання та віднімання числа до/з обох частин конгруєнції; - множення на число обох частин конгруєнції; - додавання та множення конгруєнцій;	Створення та застосування опорних конспектів за змістом теми. Дискусія. Обговорення. Усне опитування. Робота в парах з елементами взаємонавчання. Робота в малих групах. Індивідуальна робота із практичними завданнями.

проблемній ситуації її складові частини, які можуть бути розв'язані математичними методами»); - виокремлює задачі про числа, конгруентні за деяким модулем [12 МАО 1.1.2-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «самостійно або у взаємодії з іншими виокремлює спільні ознаки специфічних проблемних ситуацій, для розв'язання яких можна застосувати подібні методи»); - аналізує доцільність застосування конгруенцій, зокрема з від'ємними числами, при розв'язуванні задач [12 МАО 1.2.1-2 П] (в основі орієнтир для оцінювання «висловлює власне ставлення до здобутої інформації та нові ідеї, які виникли в результаті аналізу інформаційних джерел, наводить контраргументи»); - розрізняє види задач із однією відповіддю та з серією відповідей [12 МАО 1.2.1-3 П] (в основі орієнтир для оцінювання «оцінює повноту і достовірність інформації»); - відрізняє остачу при діленні натуральних чисел та клас лишків за даним модулем [12 МАО 1.2.3-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «визначає межі даних, формулює припущення щодо даних у специфічних проблемних ситуаціях»); - визначає конкретні значення з класу лишків, що задовольняють умови компетентнісної задачі [12 МАО 1.3.1-1	- піднесення конгруенцій до степеня; - скорочення конгруенцій на множник, взаємно простий із модулем. 2.6. Практичне застосування конгруенцій для розв'язування задач.	Робота з компетентнісно орієнтованими завданнями. Демонстрація учнями / ученицями прикладів розглянутих математичних фактів у житті. Ігрова діяльність. Робота з використанням ІКТ.
---	--	--

П] (в основі орієнтир для оцінювання «визначає типи можливих результатів розв’язання специфічної проблемної ситуації»); - застосовує різні властивості конгруенцій для опрацювання математичної моделі [12 MAO 1.3.2-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «пропонує альтернативні шляхи досягнення результатів розв’язання специфічної проблемної ситуації, оцінює можливі ризики»); - сприймає ділення з остачею у формі лишків та у формі зв’язку між діленим, дільником та остачею [12 MAO 2.1.1-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «сприймає інформацію математичного змісту в декількох формах»); - добирає інформацію для демонстрації застосування лишків у житті [12 MAO 2.1.2-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «добирає додаткову інформацію з різних джерел і галузей знань»); - перетворює вирази з «великими» числами за допомогою властивостей конгруенцій та/або відповідного ПЗ [12 MAO 2.1.3-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «впорядковує та перетворює інформацію математичного змісту в специфічних проблемних ситуаціях, зокрема із застосуванням інформаційних технологій»);		
---	--	--

- пропонує ідеї щодо застосування лишків при розв'язуванні задач із цілочисельними даними [12 МАО 2.2.1-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «виявляє ініціативу, пропонує та обґрунтовує ідеї щодо способу розв'язання специфічних проблемних ситуацій»); - вміє створювати план роботи групи для застосування конгруенцій при розв'язуванні дослідницької проблеми з цілочисельними даними [12 МАО 2.2.3-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «планує дії та організовує роботу групи, ураховуючи розподіл ролей та оцінюючи внесок кожного»); - вміє застосовувати властивості лишків для перетворення виразів із конкретними цілочисельними значеннями параметрів [12 МАО 2.3.1-2 П] (в основі орієнтир для оцінювання «здійснює перехід від абстрактного до конкретного та від конкретного до абстрактного»); - будує математичні моделі на основі конгруенцій для розв'язування компетентнісних задач [12 МАО 2.3.2-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «самостійно або у співпраці з іншими будує математичні моделі специфічних проблемних ситуацій, добирає математичні засоби для побудови моделей, ураховуючи можливі ризики»); - вміє критично оцінювати результати застосування властивостей конгруенцій до конкретних ситуацій [12		
---	--	--

МАО 2.4.1-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «оцінює результати за наданими чи самостійно розробленими критеріями»); - активно проявляє себе під час командної роботи у парі, малій групі, при розробці навчального проєкту по використанню конгруенцій [12 МАО 2.4.2-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «заохочує і підтримує членів групи під час представлення та обговорення результатів, конструктивно реагує на критику»); - виявляє суттєві властивості модуля конгруенції для їх застосування у межах обраної математичної моделі [12 МАО 3.1.1-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «самостійно або у співпраці з іншими визначає суттєві дані в специфічній проблемній ситуації, достовірність їх»); - аналізує спільні та відмінні риси різних способів перетворення виразів із «великими» цілими числами [12 МАО 3.2.1-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «аналізує спільні та відмінні риси різних моделей і шляхів розв'язання специфічної проблемної ситуації»); - орієнтується у застосуванні числової прямої та ділення з остачею для знаходження класу лишків [12 МАО 4.1.1-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «пов'язує різні математичні знання і вміння, узагальнює їх, робить висновки»); - формулює та доводить властивості конгруенцій, робить висновки щодо		
---	--	--

їхнього застосування [12 МАО 4.1.2-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «робить висновки щодо застосування математичних понять і фактів»); - визначає та усуває прогалини у власних знаннях про ділення з остачею, числову пряму, властивості степенів із натуральним показником [12 МАО 4.1.3-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «визначає та усуває прогалини у власних математичних знаннях і вміннях у специфічних проблемних ситуаціях»); - добирає доцільні властивості лишків та порядок їх застосування при розв'язуванні задач із цілочисельними даними [12 МАО 4.2.1-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «добирає доцільні математичні поняття, факти і послідовність дій для розв'язання проблемних ситуацій»); - реалізує властивості конгруенцій та перевіряє отримані результати [12 МАО 4.2.1-2 П] (в основі орієнтир для оцінювання «реалізовує визначену послідовність дій для розв'язання специфічних проблемних ситуацій, перевіряє та досліджує отримані результати»); - використовує конгруенції та числову пряму для відображення зв'язків між даними цілими числами [12 МАО 4.2.2-2 П] (в основі орієнтир для оцінювання «використовує різні форми подання математичних об'єктів відповідно до специфіки проблемної ситуації»);		
---	--	--

- використовує ІКТ для представлення результату та методу розв'язання компетентнісної проблеми з цілочисельними даними [12 МАО 4.2.3-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «використовує приладдя та інформаційно-комунікаційні технології для представлення результату у специфічних проблемних ситуаціях»); - використовує означення лишків для обґрунтування властивостей конгруенцій [12 МАО 4.3.1-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «використовує математичні поняття, факти і процедури, пояснює застосування їх, наводить аргументи»); - переформулює компетентнісну задачу з цілочисельними даними у вигляді конгруенцій [12 МАО 4.3.2-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «описує проблемну ситуацію математичною мовою, формулює припущення»); - аргументує кожний крок при застосуванні властивостей конгруенцій [12 МАО 4.3.2-2 П] (в основі орієнтир для оцінювання «обґрунтовано пояснює хід своїх міркувань, зважаючи на мету і учасників спілкування»).		
Тема 3. Ознаки подільності та їхні узагальнення. Кількість годин: 6.		
<i>Учень / учениця:</i> - вирізняє проблеми, які можуть бути розв'язані за допомогою ознак подільності [12 МАО 1.1.1-1 П] (в основі	3.1. Подільність на 2: - парність та непарність числа; - застосування парності для розв'язування задач; - парність як інваріант;	Створення та застосування опорних конспектів за змістом теми. Дискусія. Обговорення. Усне опитування.

орієнтир для оцінювання «вирізняє специфічні проблемні ситуації, які можуть бути розв'язані математичними методами»); - самостійно або у складі групи виявляє спільні ознаки задач, які можна розв'язати за допомогою парності [12 МАО 1.1.2-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «самостійно або у взаємодії з іншими виокремлює спільні ознаки специфічних проблемних ситуацій, для розв'язання яких можна застосувати подібні методи»); - вміє самостійно знаходити в різних інформаційних джерелах додаткові ознаки подільності [12 МАО 1.2.1-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «досліджує специфічну проблемну ситуацію, використовуючи різноманітні інформаційні джерела»); - критично аналізує інформацію щодо ознак подільності, наводить відповідні доведення або контрприкладі [12 МАО 1.2.1-2 П] (в основі орієнтир для оцінювання «висловлює власне ставлення до здобутої інформації та нові ідеї, які виникли в результаті аналізу інформаційних джерел, наводить контраргументи»); - оцінює доцільність використання властивостей подільності на 2, 3, 5, 7, 9, 10, 11, 13 у конкретних задачах [12 МАО 1.2.2-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «оцінює достовірність і	- ознаки подільності на число 2 та його степені; - знаходження остач від ділення натурального числа на степені числа 2. 3.2. Подільність на 5: - ознаки подільності на число 5 та його степені; - знаходження остач від ділення натурального числа на степені числа 5; - подільність числа на степені числа 10; - знаходження остач від ділення натурального числа на степені числа 10; - знаходження кількості нулів у факторіалі натурального числа, формула Лежандра. 3.3. Практичне застосування остач від ділення натуральних чисел на степені чисел 2, 5, 10. 3.4. Подільність на 3 та 9: - ознаки подільності на числа 3 та 9; - знаходження остач від ділення натурального числа на 3 та 9; - застосування знаходження остач від ділення на 3 та 9 через суму цифр числа у задачах. 3.5. Подільність на 7, 11, 13: - ознаки подільності на числа 7, 11 та 13; - остачі від ділення числа на 7, 11, 13; - практичне застосування остач від ділення натуральних чисел на 7, 11, 13; - остача від ділення числа на 1001.	Робота в парах з елементами взаємонавчання. Робота в малих групах. Індивідуальна робота із практичними завданнями. Робота з компетентісно орієнтованими завданнями. Демонстрація учнями / ученицями прикладів розглянутих математичних фактів у житті. Ігрова діяльність.
---	---	---

доцільність використання даних у специфічних проблемних ситуаціях»); - пропонує використання різних фактів про подільність для розв'язування задач [12 МАО 1.3.2-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «пропонує альтернативні шляхи досягнення результатів розв'язання специфічної проблемної ситуації, оцінює можливі ризики»); - добирає додаткову інформацію для розв'язування компетентнісних задач на подільність цілих чисел [12 МАО 2.1.2-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «добирає додаткову інформацію з різних джерел і галузей знань»); - пропонує ідеї щодо застосування ознак подільності та властивостей остач при розв'язуванні задач із цілочисельними даними [12 МАО 2.2.1-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «виявляє ініціативу, пропонує та обґрунтовує ідеї щодо способу розв'язання специфічних проблемних ситуацій»); - планує дії при роботі в групі для розв'язування задач про подільність цілих чисел [12 МАО 2.2.3-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «планує дії та організовує роботу групи, ураховуючи розподіл ролей та оцінюючи внесок кожного»); - застосовує загальні факти про ознаки подільності до розв'язування конкретних проблем [12 МАО 2.3.1-2 П] (в основі орієнтир для оцінювання		
---	--	--

«здійснює перехід від абстрактного до конкретного та від конкретного до абстрактного»); - самостійно або у співпраці з іншими будує моделі по застосуванню парності, чергування, розбиття на пари, виокремлення інваріанта [12 МАО 2.3.2-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «самостійно або у співпраці з іншими будує математичні моделі специфічних проблемних ситуацій, добирає математичні засоби для побудови моделей, ураховуючи можливі ризики»); - критично оцінює розв'язання задач із застосуванням ознак подільності [12 МАО 2.4.1-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «оцінює результати за наданими чи самостійно розробленими критеріями»); - активно співпрацює у парі, групі, під час проєктної діяльності [12 МАО 2.4.2-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «заохочує і підтримує членів групи під час представлення та обговорення результатів, конструктивно реагує на критику»); - аналізує спільні та відмінні риси при використанні різних ознак подільності [12 МАО 3.2.1-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «аналізує спільні та відмінні риси різних моделей і шляхів розв'язання специфічної проблемної ситуації»); - пов'язує ділення з остачею та ознаки подільності на групи чисел (2, 5, 10), (3, 9), (7, 11, 13) та робить висновки		
---	--	--

щодо їх узагальнення [12 МАО 4.1.1-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «пов'язує різні математичні знання і вміння, узагальнює їх, робить висновки»); - робить висновки щодо застосування ознак подільності при діленні на складене число [12 МАО 4.1.2-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «робить висновки щодо застосування математичних понять і фактів»); - визначає та усуває прогалини у власних знаннях про ознаки подільності на 2, 3, 5, 9, 10 [12 МАО 4.1.3-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «визначає та усуває прогалини у власних математичних знаннях і вміннях у специфічних проблемних ситуаціях»); - добирає відповідні ознаки та властивості подільності для розв'язування задач із цілочисельними даними [12 МАО 4.2.1-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «добирає доцільні математичні поняття, факти і послідовність дій для розв'язання проблемних ситуацій»); - використовує подання подільності за допомогою конгруенцій та з використанням остач при діленні [12 МАО 4.2.2-2 П] (в основі орієнтир для оцінювання «використовує різні форми подання математичних об'єктів відповідно до специфіки проблемної ситуації»); - використовує властивості подільності та пояснює правомірність їх застосування при розв'язуванні задач із		
--	--	--

цілочисельними даними [12 МАО 4.3.1-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «використовує математичні поняття, факти і процедури, пояснює застосування їх, наводить аргументи»); - формулює та доводить основні властивості ділення з остачею на степені чисел 2 та 5, чисел 3 та 9, чисел 7, 11, 13 [12 МАО 4.3.1-2 П] (в основі орієнтир для оцінювання «аргументовано пояснює суть основних математичних понять, фактів і процедур, зважаючи на мету та учасників спілкування, обираючи для цього відповідні мовленнєві стратегії»); - описує компетентнісну задачу з цілочисельними даними математичною мовою, з використанням ділення з остачею або націло [12 МАО 4.3.2-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «описує проблемну ситуацію математичною мовою, формулює припущення»); - аргументує всі кроки розв'язання задачі на застосування ознак подільності [12 МАО 4.3.2-2 П] (в основі орієнтир для оцінювання «обґрунтовано пояснює хід своїх міркувань, зважаючи на мету і учасників спілкування»).		
Тема 4. Діофантові рівняння. Застосування конгруенцій. Кількість годин: 4.		
<i>Учень / учениця:</i> - розпізнає діофантові рівняння, для яких варто застосовувати конгруенції за модулями 3, 4, 5, 7, 9 [12 МАО 1.1.1-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання	4.1. Властивості конгруенцій зі степенями цілих чисел: - квадрати чисел, застосування конгруенцій за модулями 3, 4, 5; - куби чисел, застосування конгруенцій за модулями 7 та 9;	Створення та застосування опорних конспектів за змістом теми. Дискусія. Обговорення. Усне опитування.

«вирізняє специфічні проблемні ситуації, які можуть бути розв'язані математичними методами»); - виокремлює властивості діофантового рівняння, що зручно досліджуються за допомогою лишків [12 МАО 1.1.1-2 П] (в основі орієнтир для оцінювання «виокремлює в конкретній специфічній проблемній ситуації її складові частини, які можуть бути розв'язані математичними методами»); - розпізнає спільні риси діофантових рівнянь, що їх варто розв'язувати із застосуванням лишків [12 МАО 1.1.2-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «самостійно або у взаємодії з іншими виокремлює спільні ознаки специфічних проблемних ситуацій, для розв'язання яких можна застосувати подібні методи»); - оцінює доцільність використання властивостей коефіцієнтів при розв'язуванні діофантових рівнянь [12 МАО 1.2.2-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «оцінює достовірність і доцільність використання даних у специфічних проблемних ситуаціях»); - при дослідженні діофантових рівнянь методом спуску визначає межі для змінних та користується ними у розв'язанні [12 МАО 1.2.3-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «визначає межі даних, формулює припущення щодо даних у специфічних проблемних ситуаціях»);	- застосування конгруенцій за модулями, що є степенями числа 2. 4.2. Діофантові рівняння: - діофантові рівняння в цілих числах; - діофантові рівняння, що не мають розв'язків, використання лишків; - діофантові рівняння, що мають розв'язки, використання лишків. 4.3. Практичне застосування діофантових рівнянь для розв'язування задач про цілу кількість предметів, використання лишків. 4.4. Метод спуску для розв'язування діофантових рівнянь: - спуск за модулем; - методи скінченного та нескінченного спусків; - розв'язування діофантових рівнянь методом спуску.	Робота в парах з елементами взаємонавчання. Робота в малих групах. Індивідуальна робота із практичними завданнями. Робота з компетентісно орієнтованими завданнями. Демонстрація учнями / ученицями прикладів розглянутих математичних фактів у житті. Ігрова діяльність. Робота з використанням ІКТ.
--	---	--

- розрізняє діофантові рівняння в натуральних, цілих, простих числах [12 МАО 1.3.1-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «визначає типи можливих результатів розв’язання специфічної проблемної ситуації»); - пропонує застосування різних модулів для дослідження діофантових рівнянь [12 МАО 1.3.2-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «пропонує альтернативні шляхи досягнення результатів розв’язання специфічної проблемної ситуації, оцінює можливі ризики»); - при застосуванні методу спуску користується різним поданням фактів подільності [12 МАО 2.1.1-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «сприймає інформацію математичного змісту в декількох формах»); - при розв’язуванні компетентнісно орієнтованих завдань на застосування діофантових рівнянь добирає додаткову інформацію з різних джерел [12 МАО 2.1.2-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «добирає додаткову інформацію з різних джерел і галузей знань»); - на основі текстової задачі впорядковує інформацію та складає діофантові рівняння [12 МАО 2.1.3-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «впорядковує та перетворює інформацію математичного змісту в специфічних проблемних ситуаціях, зокрема із		
--	--	--

застосуванням інформаційних технологій»); - пропонує та обґрунтовує різні підходи до створення й розв'язання математичних моделей для задач із цілочисельними даними [12 МАО 2.2.1-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «виявляє ініціативу, пропонує та обґрунтовує ідеї щодо способу розв'язання специфічних проблемних ситуацій»); - серед різних підходів для розв'язування діофантового рівняння обирає той, що зводиться до скінченного перебору варіантів лишків [12 МАО 2.2.2-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «обирає серед кількох різних стратегій розв'язання специфічних проблемних ситуацій таку, що задовольняє певні умови»); - вміє створювати план роботи групи для застосування методів роботи з діофантовими рівняннями при розв'язуванні дослідницької проблеми з цілочисельними даними [12 МАО 2.2.3-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «планує дії та організовує роботу групи, ураховуючи розподіл ролей та оцінюючи внесок кожного»); - при створенні математичної моделі реальної ситуації вводить змінні, визначає їх взаємозв'язки, обмежує можливу множину їх значень [12 МАО 2.3.1-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «визначає компоненти математичної моделі		
--	--	--

специфічної проблемної ситуації, їх достатність і взаємозв'язки між ними»); - застосовує факти та ідеї щодо специфічних властивостей лишків при розв'язуванні конкретних рівнянь [12 МАО 2.3.1-2 П] (в основі орієнтир для оцінювання «здійснює перехід від абстрактного до конкретного та від конкретного до абстрактного»); - при роботі в парах, малих групах, під час проєктної діяльності добирає відповідні модулі та їх властивості для розв'язування задач, що зводяться до діофантових рівнянь [12 МАО 2.3.2-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «самостійно або у співпраці з іншими будує математичні моделі специфічних проблемних ситуацій, добирає математичні засоби для побудови моделей, ураховуючи можливі ризики»); - оцінює на достовірність результати розв'язання за допомогою діофантового рівняння компетентнісної задачі [12 МАО 2.4.1-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «оцінює результати за наданими чи самостійно розробленими критеріями»); - активно співпрацює у парі, групі, під час проєктної діяльності [12 МАО 2.4.2-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «заохочує і підтримує членів групи під час представлення та обговорення результатів, конструктивно реагує на критику»);		
---	--	--

- знаходить суттєві дані компетентнісної задачі для створення її математичної моделі у вигляді діофантового рівняння [12 МАО 3.1.1-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «самостійно або у співпраці з іншими визначає суттєві дані в специфічній проблемній ситуації, достовірність їх»); - аналізує різні підходи для дослідження діофантового рівняння [12 МАО 3.2.1-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «аналізує спільні та відмінні риси різних моделей і шляхів розв’язання специфічної проблемної ситуації»); - при розв’язуванні компетентнісної задачі на використання діофантових рівнянь урахує обмеження для множин значень змінних [12 МАО 3.2.2-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «обирає математичну модель розв’язання специфічної проблемної ситуації з урахуванням різних умов»); - оцінює обґрунтованість математичного підходу з використанням діофантових рівнянь для розв’язування компетентнісної задачі [12 МАО 3.2.3-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «оцінює обґрунтованість математичного розв’язання в контексті реальної комплексної проблемної ситуації»); - застосовує дії з многочленами, формули скороченого множення у поєднанні з властивостями лишків для розв’язування діофантових рівнянь [12 МАО 4.1.1-1 П] (в основі орієнтир для		
---	--	--

оцінювання «пов'язує різні математичні знання і вміння, узагальнює їх, робить висновки»); - робить висновки щодо обґрунтованості розв'язання діофантового рівняння за допомогою лишків у випадках наявності або відсутності розв'язків [12 МАО 4.1.2-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «робить висновки щодо застосування математичних понять і фактів»); - визначає та усуває прогалини у власних знаннях із теми «многочлени» [12 МАО 4.1.3-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «визначає та усуває прогалини у власних математичних знаннях і вміннях у специфічних проблемних ситуаціях»); - добирає відповідні модулі для розв'язання діофантового рівняння чи використання методу спуску [12 МАО 4.2.1-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «добирає доцільні математичні поняття, факти і послідовність дій для розв'язання проблемних ситуацій»); - аналізує властивості модулів 2, 4, 8, 3, 5, 7, 9 та доводить відповідні факти для конгруенцій, що містять степені змінних [12 МАО 4.2.2-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «аналізує результати дій із математичними об'єктами у процесі розв'язання проблемної ситуації»); - використовує ПЗ для представлення результатів проєктної діяльності по розв'язуванню діофантових		
--	--	--

рівнянь [12 МАО 4.2.3-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «використовує приладдя та інформаційно-комунікаційні технології для представлення результату у специфічних проблемних ситуаціях»); - аргументує кожний крок при розв'язуванні діофантових рівнянь або задач, що до них зводяться [12 МАО 4.3.1-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «використовує математичні поняття, факти і процедури, пояснює застосування їх, наводить аргументи»); - формулює та доводить специфічні властивості лишків степенів цілих чисел [12 МАО 4.3.1-2 П] (в основі орієнтир для оцінювання «аргументовано пояснює суть основних математичних понять, фактів і процедур, зважаючи на мету та учасників спілкування, обираючи для цього відповідні мовленнєві стратегії»); - створює математичні моделі компетентнісних задач у вигляді діофантових рівнянь [12 МАО 4.3.2-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «описує проблемну ситуацію математичною мовою, формулює припущення»); - обґрунтовано пояснює створення математичної моделі, її розв'язання, висновки для заданої проблеми з урахуванням методів розв'язування діофантових рівнянь [12 МАО 4.3.2-2 П] (в основі орієнтир для оцінювання «обґрунтовано пояснює хід своїх міркувань, зважаючи на мету і учасників спілкування»).		
--	--	--

Тема 5. Цілі числа та ідея повного перебору. Кількість годин: 3.		
Учень / учениця: - вирізняє ситуації для розв'язування методами підбору та перебору [12 МАО 1.1.1-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «вирізняє специфічні проблемні ситуації, які можуть бути розв'язані математичними методами»); - розбиває компетентнісну задачу на частини, деякі з-поміж яких розв'язуються методом перебору [12 МАО 1.1.1-2 П] (в основі орієнтир для оцінювання «виокремлює в конкретній специфічній проблемній ситуації її складові частини, які можуть бути розв'язані математичними методами»); - визначає спільні ознаки завдань, які можна розв'язувати методами підбору чи перебору [12 МАО 1.1.2-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «самостійно або у взаємодії з іншими виокремлює спільні ознаки специфічних проблемних ситуацій, для розв'язання яких можна застосувати подібні методи»); - оцінює сутність методів підбору та перебору та доцільність їх застосування при розв'язуванні компетентнісних задач [12 МАО 1.2.1-2 П] (в основі орієнтир для оцінювання «висловлює власне ставлення до здобутої інформації та нові ідеї, які виникли в результаті аналізу	5.1. Метод перебору: - підбір та перебір у математиці; - оптимізація перебору; - перебір як метод розв'язування діофантових рівнянь. 5.2. Застосування методу перебору до розв'язування практичних задач: - розв'язування діофантових рівнянь; - розв'язування текстових задач.	Створення та застосування опорних конспектів за змістом теми. Дискусія. Обговорення. Усне опитування. Робота в парах з елементами взаємонавчання. Робота в малих групах. Індивідуальна робота із практичними завданнями. Робота з компетентнісно орієнтованими завданнями. Демонстрація учнями / ученицями прикладів розглянутих математичних фактів у житті. Ігрова діяльність. Робота з використанням ІКТ.

інформаційних джерел, наводить контраргументи»); - визначає межі даних для оптимізації скінченного перебору [12 МАО 1.2.3-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «визначає межі даних, формулює припущення щодо даних у специфічних проблемних ситуаціях»); - пропонує різні варіанти організації структури скінченного перебору [12 МАО 1.3.2-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «пропонує альтернативні шляхи досягнення результатів розв’язання специфічної проблемної ситуації, оцінює можливі ризики»); - описує можливу множину значень змінних за допомогою нерівностей, стандартних множин, проміжків [12 МАО 2.1.1-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «сприймає інформацію математичного змісту в декількох формах»); - добирає додаткову інформацію при створенні математичної моделі компетентнісної задачі із скінченною кількістю випадків [12 МАО 2.1.2-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «добирає додаткову інформацію з різних джерел і галузей знань»); - пропонує власні способи організації скінченного перебору [12 МАО 2.2.1-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «виявляє ініціативу, пропонує та обґрунтовує ідеї щодо способу		
---	--	--

розв'язання специфічних проблемних ситуацій»); - знаходить алгоритм для перебору, кількість дій у якому не перевищує заданої кількості кроків [12 МАО 2.2.2-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «обирає серед кількох різних стратегій розв'язання специфічних проблемних ситуацій таку, що задовольняє певні умови»); - планує роботу групи по розв'язуванню компетентнісних задач методом перебору [12 МАО 2.2.3-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «планує дії та організовує роботу групи, ураховуючи розподіл ролей та оцінюючи внесок кожного»); - створює математичну модель задачі зі скінченною кількістю випадків [12 МАО 2.3.1-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «визначає компоненти математичної моделі специфічної проблемної ситуації, їх достатність і взаємозв'язки між ними»); - застосовує ідеї підбору та перебору до конкретних ситуації чи їх математичних моделей [12 МАО 2.3.1-2 П] (в основі орієнтир для оцінювання «здійснює перехід від абстрактного до конкретного та від конкретного до абстрактного»); - будує математичні моделі компетентнісних задач із цілочисельними даними у скінченній кількості випадків [12 МАО 2.3.2-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «самостійно або у співпраці з		
---	--	--

іншими буде математичні моделі специфічних проблемних ситуацій, добирає математичні засоби для побудови моделей, ураховуючи можливі ризики»); - оцінює повноту отриманої множини розв'язків діофантового рівняння, що його розв'язано методом перебору [12 МАО 2.4.1-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «оцінює результати за наданими чи самостійно розробленими критеріями»); - активно співпрацює у парі, групі, під час проєктної діяльності при розв'язуванні переборних задач [12 МАО 2.4.2-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «заохочує і підтримує членів групи під час представлення та обговорення результатів, конструктивно реагує на критику»); - визначає необхідність і достатність набору фактів у компетентнісних задачах для можливості їх розв'язання методом перебору [12 МАО 3.1.1-2 П] (в основі орієнтир для оцінювання «визначає необхідність і достатність набору даних проблемної ситуації та математичних фактів для її розв'язання»); - визначає зайві дані в умові компетентнісної задачі на скінченну кількість випадків [12 МАО 3.1.2-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «визначає, яких даних недостатньо чи є надлишкові дані, під час розв'язання специфічної проблемної ситуації»);		
--	--	--

- аналізує різні способи організації перебору та оцінює їх ефективність при розв'язанні задач із цілочисельними даними [12 МАО 3.2.1-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «аналізує спільні та відмінні риси різних моделей і шляхів розв'язання специфічної проблемної ситуації»); - обирає оптимальний план організації скінченного перебору при розв'язуванні діофантових рівнянь [12 МАО 3.2.2-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «обирає математичну модель розв'язання специфічної проблемної ситуації з урахуванням різних умов»); - оцінює повноту перебору всіх можливих випадків при розв'язуванні компетентнісної задачі методом скінченного перебору [12 МАО 3.2.3-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «оцінює обґрунтованість математичного розв'язання в контексті реальної комплексної проблемної ситуації»); - використовує дії з многочленами та формули скороченого множення для організації скінченного перебору [12 МАО 4.1.1-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «пов'язує різні математичні знання і вміння, узагальнює їх, робить висновки»); - робить висновки щодо коректності застосування методу підбору чи методу перебору у конкретній ситуації [12 МАО 4.1.2-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «робить висновки щодо		
---	--	--

застосування математичних понять і фактів»); - визначає та усуває прогалини у власних математичних знаннях з теми «многочлени» [12 МАО 4.1.3-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «визначає та усуває прогалини у власних математичних знаннях і вміннях у специфічних проблемних ситуаціях»); - обирає послідовність дій при організації перебору по декільком параметрам [12 МАО 4.2.1-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «добирає доцільні математичні поняття, факти і послідовність дій для розв'язання проблемних ситуацій»); - організує обчислення та перевірку відповідей у скінченному переборі за визначеним планом [12 МАО 4.2.1-2 П] (в основі орієнтир для оцінювання «реалізовує визначену послідовність дій для розв'язання специфічних проблемних ситуацій, перевіряє та досліджує отримані результати»); - аналізує кількість та специфіку отриманих методом перебору розв'язків [12 МАО 4.2.2-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «аналізує результати дій із математичними об'єктами у процесі розв'язання проблемної ситуації»); - використовує рівності, нерівності, множини для опису варіантів перебору та отриманих відповідей у діофантових рівняннях [12 МАО 4.2.2-2 П] (в основі орієнтир для оцінювання «використовує		
--	--	--

різні форми подання математичних об'єктів відповідно до специфіки проблемної ситуації»); - використовує ПЗ для організації скінченного перебору та представлення його результату у вигляді таблиць [12 МАО 4.2.3-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «використовує приладдя та інформаційно-комунікаційні технології для представлення результату у специфічних проблемних ситуаціях»); - використовує дії з многочленами для зведення розв'язання діофантового рівняння до скінченного перебору [12 МАО 4.3.1-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «використовує математичні поняття, факти і процедури, пояснює застосування їх, наводить аргументи»); - аргументовано пояснює можливість та доцільність переборного розв'язання діофантового рівняння [12 МАО 4.3.1-2 П] (в основі орієнтир для оцінювання «аргументовано пояснює суть основних математичних понять, фактів і процедур, зважаючи на мету та учасників спілкування, обираючи для цього відповідні мовленнєві стратегії»); - складає математичну модель компетентнісної задачі зі скінченною кількістю випадків [12 МАО 4.3.2-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «описує проблемну ситуацію математичною мовою, формулює припущення»); - аргументує організацію скінченного перебору та кожний крок його виконання		
---	--	--

при розв'язуванні діофантового рівняння [12 МАО 4.3.2-2 П] (в основі орієнтир для оцінювання «обґрунтовано пояснює хід своїх міркувань, зважаючи на мету і учасників спілкування»).		
Тема 6. Лінійні діофантові рівняння. Кількість годин: 4.		
<i>Учень / учениця:</i> - вирізняє лінійні діофантові рівняння з двома змінними [12 МАО 1.1.1-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «вирізняє специфічні проблемні ситуації, які можуть бути розв'язані математичними методами»); - виокремлює при розв'язанні лінійного діофантового рівняння з двома змінними знаходження окремого розв'язку та знаходження на його основі всіх розв'язків [12 МАО 1.1.1-2 П] (в основі орієнтир для оцінювання «виокремлює в конкретній специфічній проблемній ситуації її складові частини, які можуть бути розв'язані математичними методами»); - виокремлює спільні ознаки задач, що зводяться до лінійних діофантових рівнянь з двома змінними [12 МАО 1.1.2-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «самостійно або у взаємодії з іншими виокремлює спільні ознаки специфічних проблемних ситуацій, для розв'язання яких можна застосувати подібні методи»); - досліджує вирази із скінченними ланцюговими дробами, використовуючи	6.1. Лінійні діофантові рівняння з двома змінними: - окремий випадок розв'язку та загальна серія всіх розв'язків; - кількість розв'язків лінійних діофантових рівнянь із двома змінними; - застосування лінійних діофантових рівнянь із двома змінними для розв'язування задач. 6.2. Застосування алгоритму Евкліда для розв'язування лінійних діофантових рівнянь із двома змінними: - пряме та зворотне використання алгоритму Евкліда; - застосування алгоритму Евкліда для знаходження окремого розв'язку лінійного діофантового рівняння з двома змінними; - розв'язування діофантового рівняння з двома змінними з використанням алгоритму Евкліда; - практичні застосування прямого та зворотного використання алгоритму Евкліда. 6.3. Ланцюгові дроби: - означення скінченного ланцюгового дроби; - алгоритм Евкліда, лінійні діофантові рівняння, ланцюгові дроби; - застосування ланцюгових дробів до перетворень дробово-раціональних виразів; - поняття про нескінченні ланцюгові дроби.	Створення та застосування опорних конспектів за змістом теми. Дискусія. Обговорення. Усне опитування. Робота в парах з елементами взаємонавчання. Робота в малих групах. Індивідуальна робота із практичними завданнями. Робота з компетентісно орієнтованими завданнями. Демонстрація учнями / ученицями прикладів розглянутих математичних фактів у житті. Ігрова діяльність. Робота з використанням ІКТ.

додаткові факти з різних інформаційних джерел [12 MAO 1.2.1-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «досліджує специфічну проблемну ситуацію, використовуючи різноманітні інформаційні джерела»); - висловлює ідеї щодо перетворення дробово-раціональних виразів із використанням ланцюгових дробів та алгоритма Еквкліда [12 MAO 1.2.1-2 П] (в основі орієнтир для оцінювання «висловлює власне ставлення до здобутої інформації та нові ідеї, які виникли в результаті аналізу інформаційних джерел, наводить контраргументи»); - оцінює доцільність використання даних при створенні математичної моделі компетентнісної задачі у вигляді лінійного діофантового рівняння [12 MAO 1.2.2-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «оцінює достовірність і доцільність використання даних у специфічних проблемних ситуаціях»); - визначає межі даних у компетентнісних задачах, що зводяться до лінійних діофантових рівнянь із додатковими обмеженнями [12 MAO 1.2.3-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «визначає межі даних, формулює припущення щодо даних у специфічних проблемних ситуаціях»); - пропонує альтернативні математичні моделі у вигляді лінійних діофантових рівнянь та/або їхніх систем [12 MAO 1.3.2-1 П] (в основі орієнтир для		
--	--	--

оцінювання «пропонує альтернативні шляхи досягнення результатів розв’язання специфічної проблемної ситуації, оцінює можливі ризики»); - сприймає інформацію про коефіцієнти при реалізації алгоритма Евкліда та відповідні елементи ланцюгового дробу [12 МАО 2.1.1-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «сприймає інформацію математичного змісту в декількох формах»); - добирає додаткову інформацію для формулювання коректної математичної моделі компетентнісної задачі на лінійні діофантові рівняння [12 МАО 2.1.2-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «добирає додаткову інформацію з різних джерел і галузей знань»); - обґрунтовує ідеї щодо створення математичної моделі у вигляді діофантових рівнянь або ланцюгових дробів [12 МАО 2.2.1-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «виявляє ініціативу, пропонує та обґрунтовує ідеї щодо способу розв’язання специфічних проблемних ситуацій»); - планує дії групи з розв’язування компетентнісної задачі на лінійні діофантові рівняння [12 МАО 2.2.3-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «планує дії та організовує роботу групи, ураховуючи розподіл ролей та оцінюючи внесок кожного»); - визначає етапи роботи над лінійним діофантовим рівнянням: пряме та зворотне		
---	--	--

використання алгоритма Евкліда, знаходження окремого розв'язку, знаходження усієї множини розв'язків [12 MAO 2.3.1-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «визначає компоненти математичної моделі специфічної проблемної ситуації, їх достатність і взаємозв'язки між ними»); - здійснює перехід від формулювання теореми та алгоритма Евкліда до його застосування у розв'язанні діофантового рівняння та розкладі ланцюгового дробу [12 MAO 2.3.1-2 П] (в основі орієнтир для оцінювання «здійснює перехід від абстрактного до конкретного та від конкретного до абстрактного»); - самостійно або при роботі в парі, групі, під час проєктної діяльності будує математичні моделі компетентнісних задач у вигляді лінійних діофантових рівнянь або їхніх систем [12 MAO 2.3.2-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «самостійно або у співпраці з іншими будує математичні моделі специфічних проблемних ситуацій, добирає математичні засоби для побудови моделей, ураховуючи можливі ризики»); - оцінює отримані при розв'язуванні лінійного діофантового рівняння результати на повноту та відповідність усім умовам [12 MAO 2.4.1-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «оцінює результати за наданими чи самостійно розробленими критеріями»);		
---	--	--

- активно співпрацює у парі, групі, під час проєктної діяльності при розв’язуванні лінійних діофантових рівнянь [12 МАО 2.4.2-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «заохочує і підтримує членів групи під час представлення та обговорення результатів, конструктивно реагує на критику»); - аналізує різні математичні моделі задач, пов’язаних із лінійними діофантовими рівняннями [12 МАО 3.2.1-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «аналізує спільні та відмінні риси різних моделей і шляхів розв’язання специфічної проблемної ситуації»); - обирає доцільну математичну модель задачі у вигляді лінійного діофантового рівняння або системи таких рівнянь [12 МАО 3.2.2-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «обирає математичну модель розв’язання специфічної проблемної ситуації з урахуванням різних умов»); - оцінює обґрунтованість математичної моделі та її розв’язання для випадку лінійних діофантових рівнянь з двома змінними [12 МАО 3.2.3-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «оцінює обґрунтованість математичного розв’язання в контексті реальної комплексної проблемної ситуації»); - при зворотному використанні алгоритма Евкліда користується властивостями многочленів, зокрема множенням одночлена на многочлен [12		
--	--	--

МАО 4.1.1-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «пов'язує різні математичні знання і вміння, узагальнює їх, робить висновки»); - свідомо застосовує алгоритм Евкліда для знаходження окремого розв'язку діофантового рівняння та/або розкладу дробу у ланцюговий дріб [12 МАО 4.1.2-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «робить висновки щодо застосування математичних понять і фактів»); - визначає та усуває прогалини у власних математичних знаннях із теми «многочлени» [12 МАО 4.1.3-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «визначає та усуває прогалини у власних математичних знаннях і вміннях у специфічних проблемних ситуаціях»); - обирає правильну послідовність дій при розв'язуванні лінійного діофантового рівняння з двома змінними [12 МАО 4.2.1-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «добирає доцільні математичні поняття, факти і послідовність дій для розв'язання проблемних ситуацій»); - реалізує визначену послідовність дій при прямому та зворотному використанні алгоритма Евкліда [12 МАО 4.2.1-2 П] (в основі орієнтир для оцінювання «реалізовує визначену послідовність дій для розв'язання специфічних проблемних ситуацій, перевіряє та досліджує отримані результати»);		
--	--	--

- аналізує кількість розв'язків лінійного діофантового рівняння з двома змінними в залежності від співвідношення між коефіцієнтами [12 МАО 4.2.2-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «аналізує результати дій із математичними об'єктами у процесі розв'язання проблемної ситуації»); - використовує запис як у формі лишків, так і у формі многочленів з параметром [12 МАО 4.2.2-2 П] (в основі орієнтир для оцінювання «використовує різні форми подання математичних об'єктів відповідно до специфіки проблемної ситуації»); - використовує ПЗ для відтворення та структурування результатів, пов'язаних з лінійним діофантовим рівнянням [12 МАО 4.2.3-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «використовує приладдя та інформаційно-комунікаційні технології для представлення результату у специфічних проблемних ситуаціях»); - використовує алгоритм Евкліда для розв'язування лінійних діофантових рівнянь та перетворенні ланцюгових дробів [12 МАО 4.3.1-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «використовує математичні поняття, факти і процедури, пояснює застосування їх, наводить аргументи»); - аргументує кількість розв'язків лінійного діофантового рівняння та зв'язок їх із алгоритмом Евкліда [12 МАО 4.3.1-2 П] (в основі орієнтир для		
---	--	--

оцінювання «аргументовано пояснює суть основних математичних понять, фактів і процедур, зважаючи на мету та учасників спілкування, обираючи для цього відповідні мовленнєві стратегії»); - створює математичні моделі на основі лінійних діофантових рівнянь для розв'язування компетентнісних задач [12 МАО 4.3.2-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «описує проблемну ситуацію математичною мовою, формулює припущення»); - обґрунтовує розв'язання лінійного діофантового рівняння та його застосування [12 МАО 4.3.2-2 П] (в основі орієнтир для оцінювання «обґрунтовано пояснює хід своїх міркувань, зважаючи на мету і учасників спілкування»).		
Тема 7. Мала теорема Ферма та її застосування. Кількість годин: 2.		
<i>Учень / учениця:</i> - розуміє випадки для застосування малої теореми Ферма у конгруєнціях за простим модулем [12 МАО 1.1.1-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «вирізняє специфічні проблемні ситуації, які можуть бути розв'язані математичними методами»); - виокремлює частину конгруєнції за простим модулем, до якої варто застосувати малу теорему Ферма [12 МАО 1.1.1-2 П] (в основі орієнтир для оцінювання «виокремлює в конкретній специфічній проблемній ситуації її	7.1. Мала теорема Ферма: - мала теорема Ферма, формулювання та доведення; - застосування малої теореми Ферма для знаходження лишків за простим модулем; - число, обернене до даного за простим модулем. 7.2. Застосування малої теореми Ферма: - доведення тверджень; - розв'язування задач із цілими числами.	Створення та застосування опорних конспектів за змістом теми. Дискусія. Обговорення. Усне опитування. Робота в парах з елементами взаємонавчання. Робота в малих групах. Індивідуальна робота із практичними завданнями. Робота з компетентнісно орієнтованими завданнями. Демонстрація учнями / ученицями прикладів розглянутих математичних фактів у житті.

складові частини, які можуть бути розв'язані математичними методами»); - виділяє спільні ознаки проблем, пов'язаних із малою теоремою Ферма [12 МАО 1.1.2-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «самостійно або у взаємодії з іншими виокремлює спільні ознаки специфічних проблемних ситуацій, для розв'язання яких можна застосувати подібні методи»); - висловлює ідеї щодо застосування малої теореми Ферма для арифметичних перетворень та розв'язування нелінійних діофантових рівнянь [12 МАО 1.2.1-2 П] (в основі орієнтир для оцінювання «висловлює власне ставлення до здобутої інформації та нові ідеї, які виникли в результаті аналізу інформаційних джерел, наводить контраргументи»); - пропонує різні шляхи застосування малої теореми Ферма для доведення тверджень про цілі числа [12 МАО 1.3.2-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «пропонує альтернативні шляхи досягнення результатів розв'язання специфічної проблемної ситуації, оцінює можливі ризики»); - розуміє зв'язок між числом, оберненим до даного за простим модулем, та наслідків малої теореми Ферма [12 МАО 2.1.1-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «сприймає інформацію математичного змісту в декількох формах»);		Ігрова діяльність.
--	--	--------------------

- пропонує ідеї щодо способу застосування малої теореми Ферма [12 МАО 2.2.1-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «виявляє ініціативу, пропонує та обґрунтовує ідеї щодо способу розв'язання специфічних проблемних ситуацій»); - при роботі в парі чи групі планує дії для розв'язання проблеми за допомогою малої теореми Ферма [12 МАО 2.2.3-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «планує дії та організовує роботу групи, ураховуючи розподіл ролей та оцінюючи внесок кожного»); - здійснює перехід між абстрактним формулюванням малої теореми Ферма та її наслідків та їх застосуванням у конкретних арифметичних та алгебраїчних проблемах [12 МАО 2.3.1-2 П] (в основі орієнтир для оцінювання «здійснює перехід від абстрактного до конкретного та від конкретного до абстрактного»); - перетворює математичні проблеми до вигляду, при якому варто застосувати малу теорему Ферма [12 МАО 2.3.2-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «самостійно або у співпраці з іншими будує математичні моделі специфічних проблемних ситуацій, добирає математичні засоби для побудови моделей, ураховуючи можливі ризики»); - активно співпрацює у парі, групі, під час проєктної діяльності при використанні малої теореми Ферма та її		
---	--	--

наслідків [12 МАО 2.4.2-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «заохочує і підтримує членів групи під час представлення та обговорення результатів, конструктивно реагує на критику»); - аналізує раціональність використання малої теореми Ферма та її наслідків у конкретній математичній проблемі [12 МАО 3.2.1-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «аналізує спільні та відмінні риси різних моделей і шляхів розв'язання специфічної проблемної ситуації»); - обирає конкретний варіант використання малої теореми Ферма та відповідний простий модуль [12 МАО 3.2.2-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «обирає математичну модель розв'язання специфічної проблемної ситуації з урахуванням різних умов»); - застосовує властивості многочленів разом із використанням малої теореми Ферма та її наслідків [12 МАО 4.1.1-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «пов'язує різні математичні знання і вміння, узагальнює їх, робить висновки»); - робить висновки щодо відповідності конкретної математичної проблеми та умов малої теореми Ферма [12 МАО 4.1.2-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «робить висновки щодо застосування математичних понять і фактів»); - визначає та усуває прогалини у власних знаннях із теми «многочлени» [12		
--	--	--

МАО 4.1.3-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «визначає та усуває прогалини у власних математичних знаннях і вміннях у специфічних проблемних ситуаціях»); - обирає теорему Ферма або її наслідки для розв'язування арифметичних чи алгебраїчних проблем [12 МАО 4.2.1-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «добирає доцільні математичні поняття, факти і послідовність дій для розв'язання проблемних ситуацій»); - реалізує правильну послідовність дій для обчислення лишків за простим модулем із використанням малої теореми Ферма [12 МАО 4.2.1-2 П] (в основі орієнтир для оцінювання «реалізовує визначену послідовність дій для розв'язання специфічних проблемних ситуацій, перевіряє та досліджує отримані результати»); - використовує ПЗ для представлення результатів проектної діяльності, пов'язаною із застосуванням малої теореми Ферма [12 МАО 4.2.3-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «використовує приладдя та інформаційно-комунікаційні технології для представлення результату у специфічних проблемних ситуаціях»); - формулює та доводить малу теорему Ферма та її наслідки [12 МАО 4.3.1-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «використовує математичні поняття, факти і процедури, пояснює застосування їх, наводить аргументи»);		
--	--	--

- аргументує правильність застосування малої теореми Ферма до розв'язання конкретних арифметичних чи алгебраїчних проблем [12 МАО 4.3.1-2 П] (в основі орієнтир для оцінювання «аргументовано пояснює суть основних математичних понять, фактів і процедур, зважаючи на мету та учасників спілкування, обираючи для цього відповідні мовленнєві стратегії»); - покроково обґрунтовує розв'язання арифметичної чи алгебраїчної проблеми на основі малої теореми Ферма та/або її наслідків [12 МАО 4.3.2-2 П] (в основі орієнтир для оцінювання «обґрунтовано пояснює хід своїх міркувань, зважаючи на мету і учасників спілкування»).		
Тема 8. Функція Ейлера. Кількість годин: 3.		
<i>Учень / учениця:</i> - розуміє випадки для застосування функції Ейлера та теореми Ейлера [12 МАО 1.1.1-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «вирізняє специфічні проблемні ситуації, які можуть бути розв'язані математичними методами»); - виокремлює частину конгруенції за складеним модулем, до якої варто застосувати теорему Ейлера [12 МАО 1.1.1-2 П] (в основі орієнтир для оцінювання «виокремлює в конкретній специфічній проблемній ситуації її	8.1. Функція Ейлера: - означення функції Ейлера; - функція Ейлера для 1, простого числа, степеня простого числа; - застосування методу включення-виключення для знаходження функції Ейлера; - мультиплікативність функції Ейлера; - формула для знаходження функції Ейлера. 8.2. Теорема Ейлера про лишок степеня натурального числа: - теорема Ейлера, формулювання та доведення; - застосування теореми Ейлера для знаходження лишків за складеним модулем; - число, обернене до даного за складеним модулем.	Створення та застосування опорних конспектів за змістом теми. Дискусія. Обговорення. Усне опитування. Робота в парах з елементами взаємонавчання. Робота в малих групах. Індивідуальна робота із практичними завданнями. Робота з компетентнісно орієнтованими завданнями. Демонстрація учнями / ученицями прикладів розглянутих математичних фактів у житті.

складові частини, які можуть бути розв'язані математичними методами»); - виділяє спільні ознаки проблем, пов'язаних із функцією Ейлера та теоремою Ейлера [12 MAO 1.1.2-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «самостійно або у взаємодії з іншими виокремлює спільні ознаки специфічних проблемних ситуацій, для розв'язання яких можна застосувати подібні методи»); - висловлює ідеї щодо застосування функції Ейлера та теореми Ейлера для арифметичних перетворень та розв'язування нелінійних діофантових рівнянь [12 MAO 1.2.1-2 П] (в основі орієнтир для оцінювання «висловлює власне ставлення до здобутої інформації та нові ідеї, які виникли в результаті аналізу інформаційних джерел, наводить контраргументи»); - пропонує різні шляхи застосування теореми Ейлера для доведення тверджень про цілі числа [12 MAO 1.3.2-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «пропонує альтернативні шляхи досягнення результатів розв'язання специфічної проблемної ситуації, оцінює можливі ризики»); - розуміє зв'язок між числом, оберненим до даного за складеним модулем, та теоремою Ейлера [12 MAO 2.1.1-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «сприймає інформацію математичного змісту в декількох формах»);	8.3. Застосування функції Ейлера та теореми Ейлера для розв'язування задач на доведення та обчислення. 8.4. Лінійні конгруенції з однією змінною.	Ігрова діяльність. Робота з використанням ІКТ.
--	---	---

- пропонує ідеї щодо способу застосування теореми Ейлера [12 МАО 2.2.1-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «виявляє ініціативу, пропонує та обґрунтовує ідеї щодо способу розв’язання специфічних проблемних ситуацій»); - при роботі в парі чи групі планує дії для розв’язання проблеми за допомогою функції Ейлера та/або теореми Ейлера [12 МАО 2.2.3-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «планує дії та організовує роботу групи, ураховуючи розподіл ролей та оцінюючи внесок кожного»); - здійснює перехід між абстрактним формулюванням теореми Ейлера та її наслідків та їх застосуванням у конкретних алгебраїчних проблемах [12 МАО 2.3.1-2 П] (в основі орієнтир для оцінювання «здійснює перехід від абстрактного до конкретного та від конкретного до абстрактного»); - перетворює математичні проблеми до вигляду, при якому варто застосувати функцію Ейлера та/або теорему Ейлера [12 МАО 2.3.2-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «самостійно або у співпраці з іншими будує математичні моделі специфічних проблемних ситуацій, добирає математичні засоби для побудови моделей, ураховуючи можливі ризики»); - активно співпрацює у парі, групі, під час проєктної діяльності при використанні функції Ейлера та/або теореми Ейлера [12 МАО 2.4.2-1 П] (в		
---	--	--

основі орієнтир для оцінювання «заохочує і підтримує членів групи під час представлення та обговорення результатів, конструктивно реагує на критику»); - аналізує раціональність використання теореми Ейлера у конкретній математичній проблемі [12 МАО 3.2.1-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «аналізує спільні та відмінні риси різних моделей і шляхів розв’язання специфічної проблемної ситуації»); - обирає конкретний варіант використання теореми Ейлера та відповідний складений модуль [12 МАО 3.2.2-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «обирає математичну модель розв’язання специфічної проблемної ситуації з урахуванням різних умов»); - застосовує властивості многочленів разом із використанням теореми Ейлера [12 МАО 4.1.1-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «пов’язує різні математичні знання і вміння, узагальнює їх, робить висновки»); - робить висновки щодо відповідності конкретної математичної проблеми та умові теореми Ейлера [12 МАО 4.1.2-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «робить висновки щодо застосування математичних понять і фактів»); - визначає та усуває прогалини у власних знаннях із теми «многочлени» [12 МАО 4.1.3-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «визначає та усуває прогалини		
--	--	--

у власних математичних знаннях і вміннях у специфічних проблемних ситуаціях»); - обирає функцію Ейлера та/або теорему Ейлера або її наслідки для розв'язування арифметичних чи алгебраїчних проблем [12 МАО 4.2.1-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «добирає доцільні математичні поняття, факти і послідовність дій для розв'язання проблемних ситуацій»); - реалізує правильну послідовність дій для обчислення лишків за складеним модулем із використанням теореми Ейлера [12 МАО 4.2.1-2 П] (в основі орієнтир для оцінювання «реалізовує визначену послідовність дій для розв'язання специфічних проблемних ситуацій, перевіряє та досліджує отримані результати»); - використовує ПЗ для представлення результатів проектної діяльності, пов'язаною із застосуванням функції Ейлера та/або теореми Ейлера [12 МАО 4.2.3-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «використовує приладдя та інформаційно-комунікаційні технології для представлення результату у специфічних проблемних ситуаціях»); - формулює та доводить властивості функції Ейлера, формулює теорему Ейлера [12 МАО 4.3.1-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «використовує математичні поняття, факти і процедури, пояснює застосування їх, наводить аргументи»);		
--	--	--

- аргументує правильність застосування функції Ейлера та/або теореми Ейлера до розв'язання конкретних арифметичних чи алгебраїчних проблем [12 МАО 4.3.1-2 П] (в основі орієнтир для оцінювання «аргументовано пояснює суть основних математичних понять, фактів і процедур, зважаючи на мету та учасників спілкування, обираючи для цього відповідні мовленнєві стратегії»); - покроково обґрунтовує розв'язання арифметичної чи алгебраїчної проблеми на основі функції Ейлера та/або теореми Ейлера, розв'язує лінійні конгруентності [12 МАО 4.3.2-2 П] (в основі орієнтир для оцінювання «обґрунтовано пояснює хід своїх міркувань, зважаючи на мету і учасників спілкування»).		
Тема 9. Шифри з відкритим кодом. Кількість годин: 2.		
<i>Учень / учениця:</i> - розуміє ситуації, у яких потрібно шифрувати інформацію [12 МАО 1.1.1-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «вирізняє специфічні проблемні ситуації, які можуть бути розв'язані математичними методами»); - застосовує ідеї з різних інформаційних джерел для створення різних криптосистем [12 МАО 1.2.1-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «досліджує специфічну проблемну	9.1. Принципи побудови криптосистеми з відкритим кодом: - побудова криптосистеми з відкритим кодом; - приклади криптосистем із відкритим кодом. 9.2. Алгоритм RSA: - функція Ейлера для напівпростих чисел; - алгоритм створення відкритого та секретного ключів; - приклади роботи алгоритму RSA; - сеансовий ключ; 9.3. Цифровий підпис.	Створення та застосування опорних конспектів за змістом теми. Дискусія. Обговорення. Робота в малих групах. Робота з компетентнісно орієнтованими завданнями. Демонстрація учнями / ученицями прикладів розглянутих математичних фактів у житті. Ігрова діяльність (з використанням цифрових інструментів). Робота з використанням ІКТ.

ситуацію, використовуючи різноманітні інформаційні джерела»); - аналізує переваги та недоліки різних систем шифрування, зокрема, криптосистем з відкритим кодом [12 МАО 1.2.1-2 П] (в основі орієнтир для оцінювання «висловлює власне ставлення до здобутої інформації та нові ідеї, які виникли в результаті аналізу інформаційних джерел, наводить контраргументи»); - визначає межі сеансового ключа для ефективного шифрування [12 МАО 1.2.3-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «визначає межі даних, формулює припущення щодо даних у специфічних проблемних ситуаціях»); - сприймає ідею шифрування з відкритим кодом як у вигляді блок-схеми, так і у вигляді конгруенцій [12 МАО 2.1.1-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «сприймає інформацію математичного змісту в декількох формах»); - добирає додаткову інформацію з різних джерел щодо надійності різних методів шифрування та їх застосування [12 МАО 2.1.2-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «добирає додаткову інформацію з різних джерел і галузей знань»); - зашифровує та розшифровує числову інформацію за допомогою відомих відкритого та секретного ключів [12 МАО 2.1.3-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «впорядковує та перетворює		
---	--	--

інформацію математичного змісту в специфічних проблемних ситуаціях, зокрема із застосуванням інформаційних технологій»); - пропонує свої варіанти шифрування інформації та їх доцільність [12 MAO 2.2.1-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «виявляє ініціативу, пропонує та обґрунтовує ідеї щодо способу розв'язання специфічних проблемних ситуацій»); - серед різних варіантів шифрування обирає такий, який задовольняє умови щодо стійкості та швидкості роботи [12 MAO 2.2.2-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «обирає серед кількох різних стратегій розв'язання специфічних проблемних ситуацій таку, що задовольняє певні умови»); - при парній та груповій роботі з шифрами організує роботу групи по зашифровці та розшифрування тексту [12 MAO 2.2.3-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «планує дії та організовує роботу групи, ураховуючи розподіл ролей та оцінюючи внесок кожного»); - визначає зв'язки між компонентами алгоритма RSA [12 MAO 2.3.1-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «визначає компоненти математичної моделі специфічної проблемної ситуації, їх достатність і взаємозв'язки між ними»); - застосовує функцію Ейлера до конкретних напівпростих чисел [12 MAO		
---	--	--

2.3.1-2 П] (в основі орієнтир для оцінювання «здійснює перехід від абстрактного до конкретного та від конкретного до абстрактного»); - створює самостійно або в групі чи парі відкритий та секретний ключі для алгоритма RSA [12 MAO 2.3.2-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «самостійно або у співпраці з іншими будує математичні моделі специфічних проблемних ситуацій, добирає математичні засоби для побудови моделей, ураховуючи можливі ризики»); - вишукує додаткові дані для вдосконалення способу шифрування [12 MAO 2.3.3-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «вишукує додаткові дані для вдосконалення моделі специфічної проблемної ситуації»); - активно співпрацює у парі, групі, під час проєктної діяльності при використанні алгоритма RSA [12 MAO 2.4.2-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «заохочує і підтримує членів групи під час представлення та обговорення результатів, конструктивно реагує на критику»); - аналізує спільні та відмінні риси різних способів шифрування даних [12 MAO 3.2.1-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «аналізує спільні та відмінні риси різних моделей і шляхів розв’язання специфічної проблемної ситуації»); - свідомо обирає пару простих чисел для створення поточної версії параметрів		
--	--	--

для алгоритма RSA [12 MAO 3.2.2-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «обирає математичну модель розв'язання специфічної проблемної ситуації з урахуванням різних умов»); - оцінює обґрунтованість введення сеансового ключа та його зашифровки [12 MAO 3.2.3-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «оцінює обґрунтованість математичного розв'язання в контексті реальної комплексної проблемної ситуації»); - пов'язує властивості функції Ейлера, теореми Ейлера, алгоритма Евкліда та швидкого піднесення до степеня при роботі з алгоритмом RSA [12 MAO 4.1.1-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «пов'язує різні математичні знання і вміння, узагальнює їх, робить висновки»); - розуміє математичний сенс зашифровування та розшифрування за допомогою алгоритма RSA [12 MAO 4.1.2-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «робить висновки щодо застосування математичних понять і фактів»); - визначає та усуває прогалини у власних знаннях про властивості степенів, функцію Ейлера та теорему Ейлера, алгоритм Евкліда, лінійні діофантові рівняння з двома змінними [12 MAO 4.1.3-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «визначає та усуває прогалини у власних математичних знаннях і вміннях у специфічних проблемних ситуаціях»);		
---	--	--

- добирає доцільні напівпрості числа, відкриту експоненту для створення шифру з відкритим ключем [12 МАО 4.2.1-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «добирає доцільні математичні поняття, факти і послідовність дій для розв’язання проблемних ситуацій»); - може зашифрувати та розшифрувати повідомлення, використовуючи алгоритм RSA та швидке піднесення до степеня [12 МАО 4.2.1-2 П] (в основі орієнтир для оцінювання «реалізовує визначену послідовність дій для розв’язання специфічних проблемних ситуацій, перевіряє та досліджує отримані результати»); - доводить теоретичні результати, що пов’язують відкриту та секретну експоненту у алгоритмі RSA, а також встановлює зв’язок між зашифрованим та початковим повідомленням у цифровому вигляді [12 МАО 4.2.2-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «аналізує результати дій із математичними об’єктами у процесі розв’язання проблемної ситуації»); - використовує подання інформації у вигляді конгруенцій та діофантових рівнянь [12 МАО 4.2.2-2 П] (в основі орієнтир для оцінювання «використовує різні форми подання математичних об’єктів відповідно до специфіки проблемної ситуації»); - використовує ІКТ для користування шифром з відкритим		
---	--	--

ключем та цифровим підписом [12 МАО 4.2.3-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «використовує приладдя та інформаційно-комунікаційні технології для представлення результату у специфічних проблемних ситуаціях»); - розуміє та пояснює ключові поняття алгоритма RSA, принцип побудови цифрового підпису [12 МАО 4.3.1-2 П] (в основі орієнтир для оцінювання «аргументовано пояснює суть основних математичних понять, фактів і процедур, зважаючи на мету та учасників спілкування, обираючи для цього відповідні мовленнєві стратегії»); - застосовує математичні принципи шифрування для передачі текстової інформації [12 МАО 4.3.2-1 П] (в основі орієнтир для оцінювання «описує проблемну ситуацію математичною мовою, формулює припущення»); - обґрунтовано пояснює ідею використання шифрів з відкритим кодом, зашифрованого сеансового ключа, цифрового підпису [12 МАО 4.3.2-2 П] (в основі орієнтир для оцінювання «обґрунтовано пояснює хід своїх міркувань, зважаючи на мету і учасників спілкування»).		
---	--	--

ПРИКІНЦЕВА ЧАСТИНА

Оцінювання результатів навчання

Основними видами оцінювання результатів навчання учнів є формувальне, поточне та підсумкове (тематичне, річне).

Формувальне оцінювання здійснюється на всіх етапах роботи учнів і передбачає систематичний зворотний зв'язок щодо процесу засвоєння знань і вироблення вмінь. Оцінюванню підлягають як процес, так і результат навчальної діяльності.

Поточне оцінювання передбачає відстеження рівня засвоєння навчального матеріалу на уроці та між уроками. Здійснюється через:

- усне опитування (індивідуальне, групове, фронтальне);
- письмові завдання (самостійні, контрольні, вправи з розв'язування задач з алгоритмізації, логіки і т.д.);
- цифрові форми (онлайн-тести, робота з інтерактивними тренажерами, використання відкритого програмного забезпечення);
- практичні роботи (робота з алгоритмами, створення поточних проєктів, моделювання даних).

Підсумкове оцінювання проводиться у формі контрольних і тематичних робіт, виконання тестових завдань, а також через виконання учнівських проєктів.

Оцінюванню підлягають:

- здатність учня/учениці застосовувати теоретичні знання на практиці;
- уміння працювати з цифровими інструментами та програмним забезпеченням;
- вміння аналізувати, відбирати та коректно використовувати інформацію;
- здатність до роботи з даними (структурування, візуалізація, пошук закономірностей);
- культура цифрової комунікації, безпечна поведінка в інформаційному середовищі;
- вміння працювати індивідуально та в команді над спільними завданнями.

Особливістю цієї Програми є можливість виконання учнівського проєкту як альтернативи традиційній контрольній роботі чи тестуванню. Такий формат дозволяє оцінювати не лише рівень засвоєння знань, а й уміння застосовувати їх у практичній діяльності, здатність до самостійного пошуку та аналізу інформації, творчість і командну взаємодію.

Орієнтовні критерії оцінювання учнівських проєктів.

1. Актуальність і постановка проблеми (0–2 бали):
 - чітке визначення теми, завдань і цілей проєкту;
 - обґрунтування вибору інструментів.
2. Теоретична база та використані знання (0–2 бали):
 - застосування вивчених понять з теорії чисел та відповідних властивостей, теорем, алгоритмів;
 - використання базових і розширених знань з алгебри та теорії чисел.
3. Технічна реалізація (0–4 бали):
 - якість розв'язання проблеми (структурованість, коментарі, оптимальність);

- виконання необхідних покрокових розрахунків у класичний спосіб або за допомогою цифрових інструментів;
 - правильність і відсутність критичних помилок.
4. Творчість і самостійність (0–2 бали):
- оригінальність ідеї реалізації мети проєкту;
 - ступінь самостійного виконання роботи;
 - дотримання принципів академічної доброчесності.
5. Презентація та захист проєкту (0–2 бали):
- здатність учня/учениці пояснити принципи реалізації проєкту та обґрунтувати обрані методи;
 - якість візуалізації результатів (формули, таблиці, блок-схеми, демонстрація роботи програми тощо).
- Максимальна кількість балів – 12.

Використані джерела

- 1) Державний стандарт базової середньої освіти : затв. постановою Кабінету Міністрів України від 30 вересня 2020 р. № 898. URL: <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/898-2020-%D0%BF#Text> (дата звернення: 28.08.2025).
- 2) Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Алгебра : підруч. для 8 кл. з поглибл. вивч. математики. Харків : Гімназія, 2023. 384 с.
- 3) Методичні рекомендації для розроблення модельних навчальних програм : додаток до листа Міністерства освіти і науки України від 24.03.2021 року № 4.5/637-21. URL: <https://mon.gov.ua/static-objects/mon/sites/1/rizne/2021/03/25/metod.pdf> (дата звернення: 28.08.2025).
- 4) Лейфура В. М. Задачі з цілими числами. *Розв'язуємо разом. Серія «Бібліотека журналу “Математика в школах України”»*. Харків, 2003. Вип. 3. с. 5–105.
- 5) Секрети підготовки школярів до Всеукраїнських та Міжнародних математичних олімпіад. Теорія чисел : навч.-метод. посіб. / В. А. Ясінський та ін. Вінниця : ТОВ «Нілан-ЛТД», 2018. 336 с.
- 6) Тадєєв В. О. Неформальна математика. 6–9 класи. Навчальний посібник для учнів, які хочуть знати більше, ніж вивчається у школі. Тернопіль : Навчальна книга – Богдан, 2003. 288 с.
- 7) Типова освітня програма закладів загальної середньої освіти III ступеня : затв. наказом Міністерства освіти і науки України від 20.06.2025 № 890. URL: <https://mon.gov.ua/npa/pro-vnesennia-zmin-do-typovoi-osvitnoi-prohramy-zakladiv-zahalnoi-serednoi-osvity-iii-stupenia> (дата звернення: 28.08.2025).

- 8) Федак І. В. Розв'язування задач підвищеної складності з математики. Спеціальний курс : Навч. посіб. / Івано-Франківськ, 2010. 100 с.
- 9) Ясінський В. А. Задачі математичних олімпіад та методи їх розв'язування. Тернопіль : Навчальна книга – Богдан, 2006. 208 с.